Ueber die vierte Dimension.111

Wir haben das letzte Mal versucht,uns ein vierdimensionales Raumgebilde zu schaffen.Um uns zu veranschaulichen,haben wir es auf ein 3 dimensionales reduziert.Zunächst haben wir ein 3 dimensionales Raumgebilde auf ein 2 dimensionales reduziert.Wir setzen statt der Dimension Farben ein,so dass ein Würfel längs der 3 Dimensionen in 3 Farben erschien. Dann konnten wir die Grenzen eines Würfels auf die Ebene hinlegen.Wir hatten durch Farben 3 Dimensionen repräsentiert, Wir legten 6 Quadrate in die Ebene hinein,dann stellten wir uns ein Durchgangsquadrat auf,durch welches die Quadrate gefärbt wurden.(So haben wir uns den Würfel vorgestellt).Bei den Flächen hatten wir 2 Grenzfarben,und beim Würfel 3 und nehmen dann eine 4te Farbe als Grenzfarbe hinzu.Wir liessen auch dabei(nach der Analogie des Hinton)die Würfel durch die neue Farbe hindurchgehen,und auf der andern Seite erschienen sie dann wieder in ihrer eigenen Farbe.Nun will ich ihnen eine andere Analogie geben um zunächst die 3 Dimensionen wieder auf 2 dann 4 Dimensionen auf 3 zu reduzieren.

Der Würfel kann an seinen Grenzflächen zusammengesetzt werden aus seinen 6 Grenzquadraten,statt aber nun,wie neulich,die Ausbreitung hintereinander vorzunehmen,wird sie jetzt auf eine andere Weise geschehen,ich werde auch diese Figur hinzeichnen.Sie sehen,wir haben jetzt auf diese Weise den Würfel ausgebreitet.2 Systeme deren jedes in der Ebene liegt und aus je drei Vierecken besteht.Wenn ich nun den Würfel an diesen 6 Quadraten wieder zusammensetzen will,so muss ich die beiden Apteilungen so über einander legen,dass Quadrat 111 über 1 zu liegen kommt.Wenn ~~auch~~ auf diese Weise 1 unten zu liegen kommt,muss ich die Quadrate 11 und V hochklappen,1V und V1 dagegen nach unten hinunter klappen.

Dabei bekommen wir gewisse korespondierende Linien,die sich gegenseitig decken, die in der Figur mit gleichen Farben und gleichen Strichenzahl markierten Linien werden zusammenfallen. Das was hier in der Ebene im 2 dimensionalen Raum liegt,fällt in gewisser Weise zusammen,wenn ich in den ~~3~~ 3 dimensionalen Raum übergehe. Das Quadrat besteht aus 4 Seiten,der Würfel aus 6 Quadraten und ein Tessarakt würde aus 8 Würfeln bestehen,nur handelt es sich darum,dass die 8 Würfel nicht wiederum zu einem Würfel zusammengesetzt werden dürfen,sondern,dass immer einer in entsprechender Weise durch die 4te Dimension durchgehen müsste und mit dem Tessarakt machen,was ich eben mit dem Würfel getan,so muss ich dasselbe Gesetz innehalten. Wie ich nun hier 2 Systeme von Quadraten erhielt,so ergibt sich beim Tessarakt dasselbe mit Würfeln,wenn ich das 4 dimensionale Tessarakt in 3 dimensionalen Raum abhalte,und dies Gebilde wird dann so aussehen: Dabei sind jedesmal diese Würfel im 3 dimensionalen Raum so zu nehmen, wie diese Quadrate im 2 dimensionalen Raum. Sie müssen sich nur genau ausschauen,was ich hier gemacht habe. Bei dem Abklappen des Würfels in den 2 dimensionalen Raum ergab sich im System von 6 Quadraten,bei der entsprechenden Prozedur am Tessarakt erhalten wir ~~im~~ ein System von 8 Würfeln. Wir haben die Betrachtung für den 3 dimensionalen Raum auf den 4 dimensionalen übergeführt. Bei dem abgeklappten Würfel ergeben sich verschiedene korespondierende Linien,die sich beim spätern Wiederhochklappen decken. Ein gleiches findet statt mit den Flächen unserer einzelnen Würfel des Tessaraktes. Es würde aber beim Tessarakte die Fläche des Würfels 5,durch Beobachtung der 4tenDimension,mit der nicht sichtbaren unteren Fläche des Würfels 6 zusammenfallen,in gleicher Weise die Fläche 6 des Würfels 1 mit dem hinteren Quadrat des Würfels 2 und ebenso dem Quadrat c des Würfels 4 mit dem entsprechenden des Würfels 3. Es bleibt übrig der von den 6 anderen eingeschlossenen 7 Würfel.

3)

Ebenso wie ein von 4 Quadraten eingeschlossenes 5tes Quadrat wie wir dies an der entsprechenden Figur des vorigen Vortrages gesehen haben,-dem nur 2 dimensional schauenden Wesen unsichbar bleibt,so ist dies hier mit dem 7ten Würfel der Fall,es bleibt dem 3 dimensionalen Auge verborgen. Diesem 7ten Würfel entspricht beim Tessarakt ein 8ter Würfel,der,da wir hier einen 4 dimensionalen Körper haben,als Gegen~~stände~~stück zum 7ten in der 4ten Dimension liegt.

Es ist auf eine andere Weise kaum möglich,eine Anleitung zu geben,wie man sich ein 4 dimensionales Gebilde zu denken hat. Nun möchte ich noch auf eine andere Weise zu sprechen kommen,die Ihnen vielleicht auch noch die Mäglichkeit geben wird,das besser einzusehen um was es sich handelt. Dies hier ist ein Oktaeder, das von 8 Dreiecken begrenzt ist. Wenn Sie sich dies Gebilde hier vorstellen,so bitte ich Sie, mit in Gedanken folgende Prozedur vorzunehmen. Sie sehen,hier ist immer eine Fläche von einer andern geschnitten,-hier(z.B. in A B)stossen 2 Seiten (Flächen) zusammen,und hier(E B)stossen 2 zusammen. Der ganze Unterschied zwischen Oktaeder und Würfel ist der Schnittpunkt der Winkel;wenn sich Flächen so schneiden -wie beim Würfel- so entsteht ein Würfel, wenn sie sich aber so schneiden wie hier,so entsteht ein Oktaeder. Es handelt sich darum,dass wir Flächen unter den verschiedensten Winkeln sich schneiden lassen,dann bekommen wir die verschiedensten Raumgebilde.

Denken Sie sich nun,wir könnten hier dieselben Flächen des Oktaeders auch in anderer Weise zum Schneiden bringen. Denken Sie sich diese Fläche hier-z.B. A E B nach allen Seiten fortgesetzt,und die untere hier B C F auch,dann ebenso die rückwärts liegenden ADF und EDC und rückwärts ~~EAD/undDC/~~ E A D/und D C F und die 4 die dann bleiben,die geben dieses Tetraeder,das man auch die Hälfte eines Oktaeders ~~nimmt~~ nennt,das deshalb die Hälfte eines Oktaeders ist,weil es die Hälfte der Flächen des Oktaeders zum Schnitt bringt. Beim Oktaeder ist das ganz leicht vorzustellen.

3)

Ebenso wie ein von 4 Quadraten eingeschlossenes 5tes Quadrat wie wir dies an der entsprechenden Figur des vorigen Vortrages gesehen haben,-dem nur 2 dimensional schauenden Wesen unsichbar bleibt,so ist dies hier mit dem 7ten Würfel der Fall,es bleibt dem 3 dimensionalen Auge verborgen. Diesem 7ten Würfel entspricht beim Tessarakt ein 8ter Würfel,der,da wir hier einen 4 dimensionalen Körper haben,als Gegen~~stände~~ stück zum 7ten in der 4ten Dimension liegt.

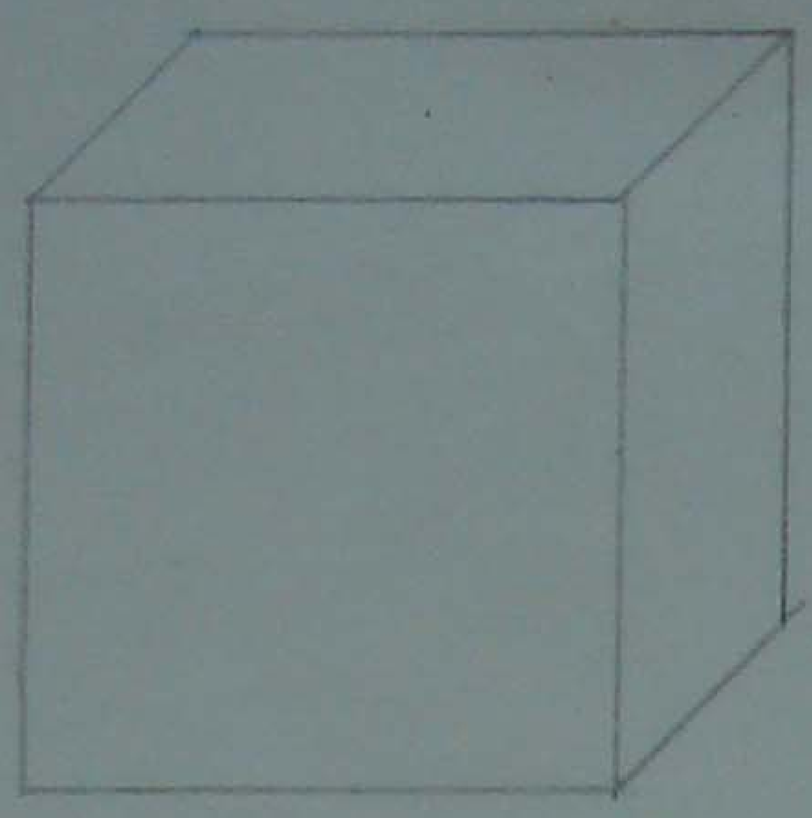
Es ist auf eine andere Weise kaum möglich,eine Anleitung zu geben,wie man sich ein 4 dimensionales Gebilde zu denken hat. Nun möchte ich noch auf eine andere Weise zu sprechen kommen,die Ihnen vielleicht auch noch die Mäglichkeit geben wird,das besser einzusehen um was es sich handelt. Dies hier ist ein Oktaeder, das von 8 Dreiecken begrenzt ist. Wenn Sie sich dies Gebilde hier vorstellen,so bitte ich Sie, mit in Gedanken folgende Prozedur vorzunehmen. Sie sehen,hier ist immer eine Fläche von einer andern geschnitten,-hier(z.B. in A B)stossen 2 Seiten (Flächen) zusammen,und hier(E B)stossen 2 zusammen. Der ganze Unterschied zwischen Oktaeder und Würfel ist der Schnittpunkt der Winkel;wenn sich Flächen so schneiden -wie beim Würfel- so entsteht ein Würfel, wenn sie sich aber so schneiden wie hier,so entsteht ein Oktaeder. Es handelt sich darum,dass wir Flächen unter den verschiedensten Winkeln sich schneiden lassen,dann bekommen wir die verschiedensten Raumgebilde.

Denken Sie sich nun,wir könnten hier dieselben Flächen des Oktaeders auch in anderer Weise zum Schneiden bringen. Denken Sie sich diese Fläche hier-z.B. A E B nach allen Seiten fortgesetzt,und die untere hier B C F auch,dann ebenso die rückwärts liegenden ADF und EDC und rückwärts ~~EAD/undDC/F~~ E A D/und D C F und die 4 die dann bleiben,die geben dieses Tetraeder,das man auch die Hälfte eines Oktaeders ~~nimmt~~ nennt,das deshalb die Hälfte eines Oktaeders ist,weil es die Hälfte der Flächen des Oktaeders zum Schnitt bringt. Beim Oktaeder ist das ganz leicht vorzustellen.

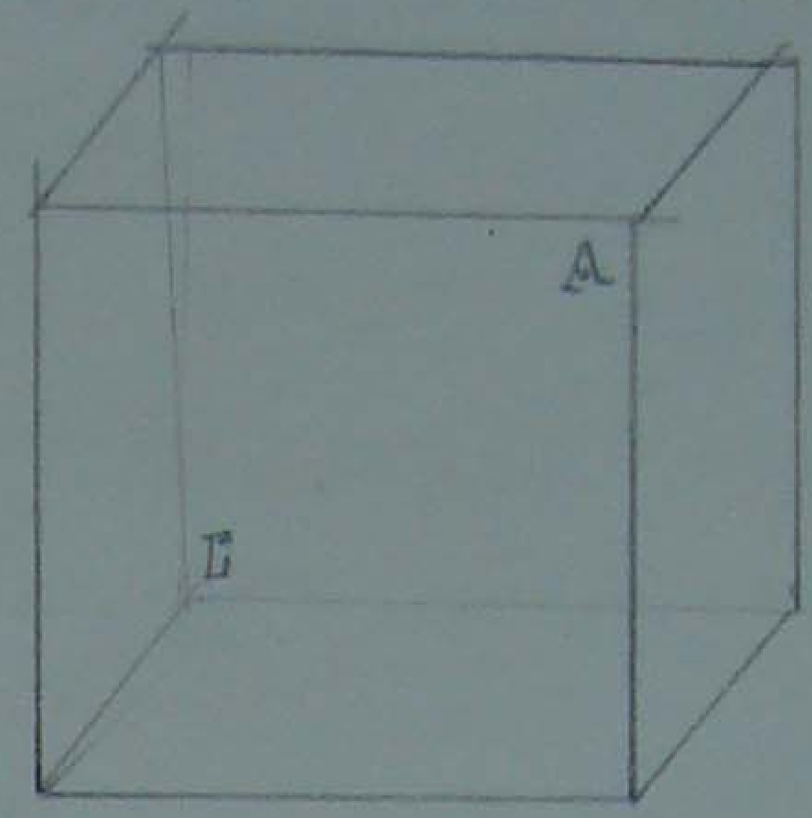
Wenn Sie sich den Würfel in derselben Weise halbiert denken, wenn Sie also hier eine Fläche mit der entsprechenden anderen sich schneiden lassen, so bekommen Sie immer wieder einen Würfel. Die Hälfte eines Würfels ist wieder ein Würfel. Daraus möchte ich einen wichtigen Schluss ziehen, will aber noch dies zur Hilfe nehmen. Hier habe ich einen Rhombendodekaeder. Sie sehen dass die Flächen unter gewissen Winkeln zusammen an einander grenzen. Es ist nun hier zu gleicher Zeit ein System von 4 Drähten ~~n~~ zu sehen, welche ich Achseldrähte nennen möchte, und die zu einander gegenläufig sind. Diese Drähte stellen nun in einer ähnlichen Weise ein System von Achsen dar, wie Sie es sich vorstellten, dass ein am Würfel ein System von Achsen ist. Den Würfel bekommt man, wenn man bei einem System von 3 aufeinander senkrecht stehenden Achsen dadurch Schnittflächen herhervorbringt, dass eintreten. Lässt man die Achsen unter anderen Winkeln sich schneiden, so bekommt man ein anderes Raumgebilde. Das Rhombendodekaeder hat Achsen, die sich unter einander als rechter Winkel schneiden. Der Würfel gibt halbiert sich selbst, - aber nur beim Würfel trifft dies zu.

Fig

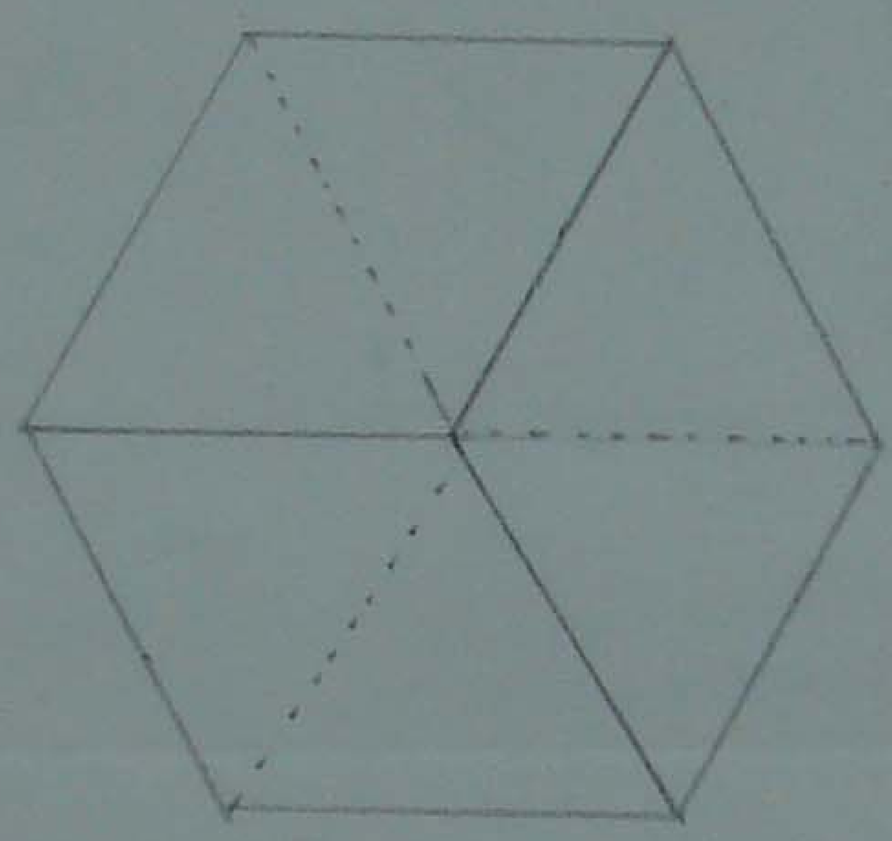
I



I a



I b



II

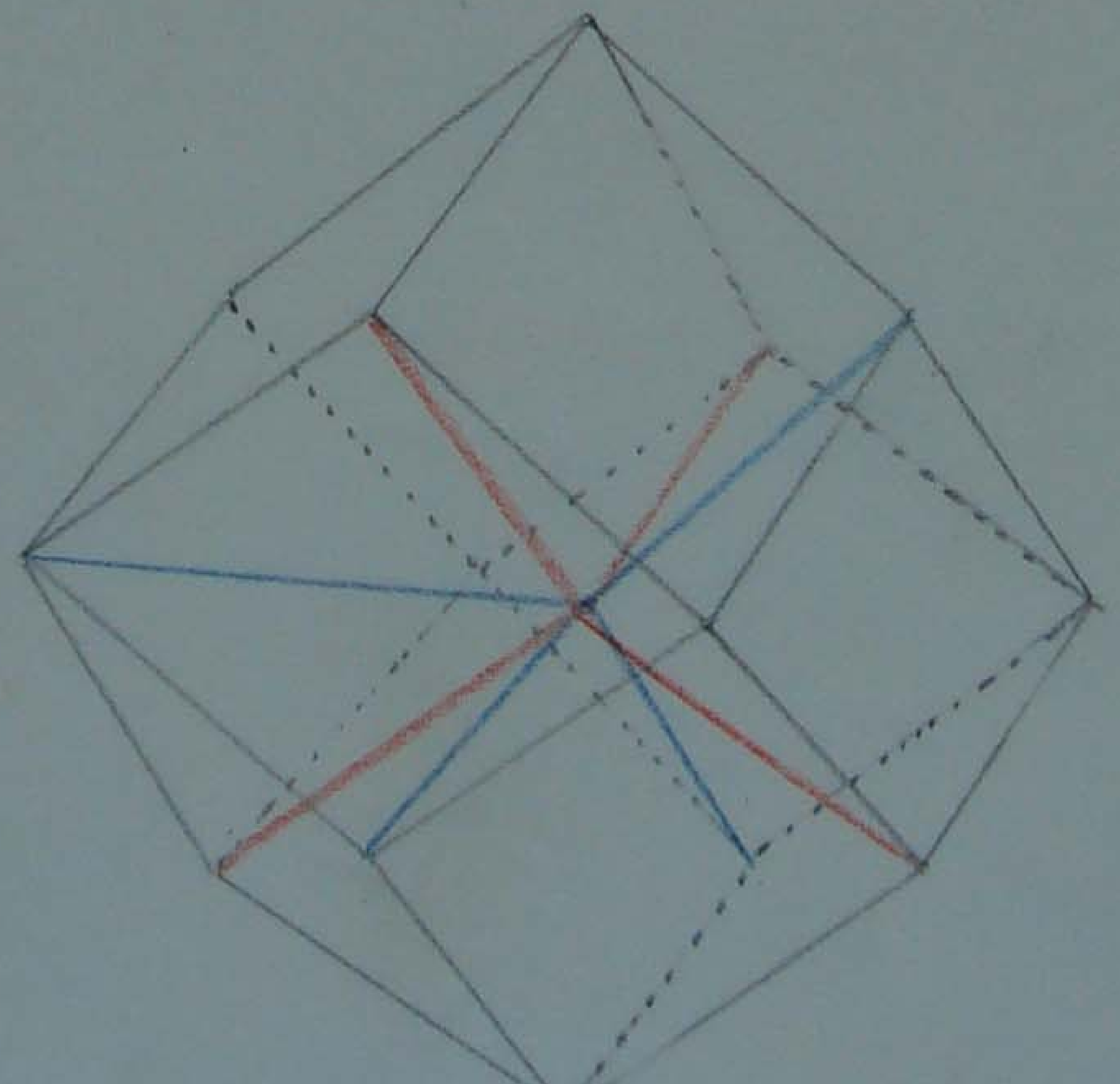
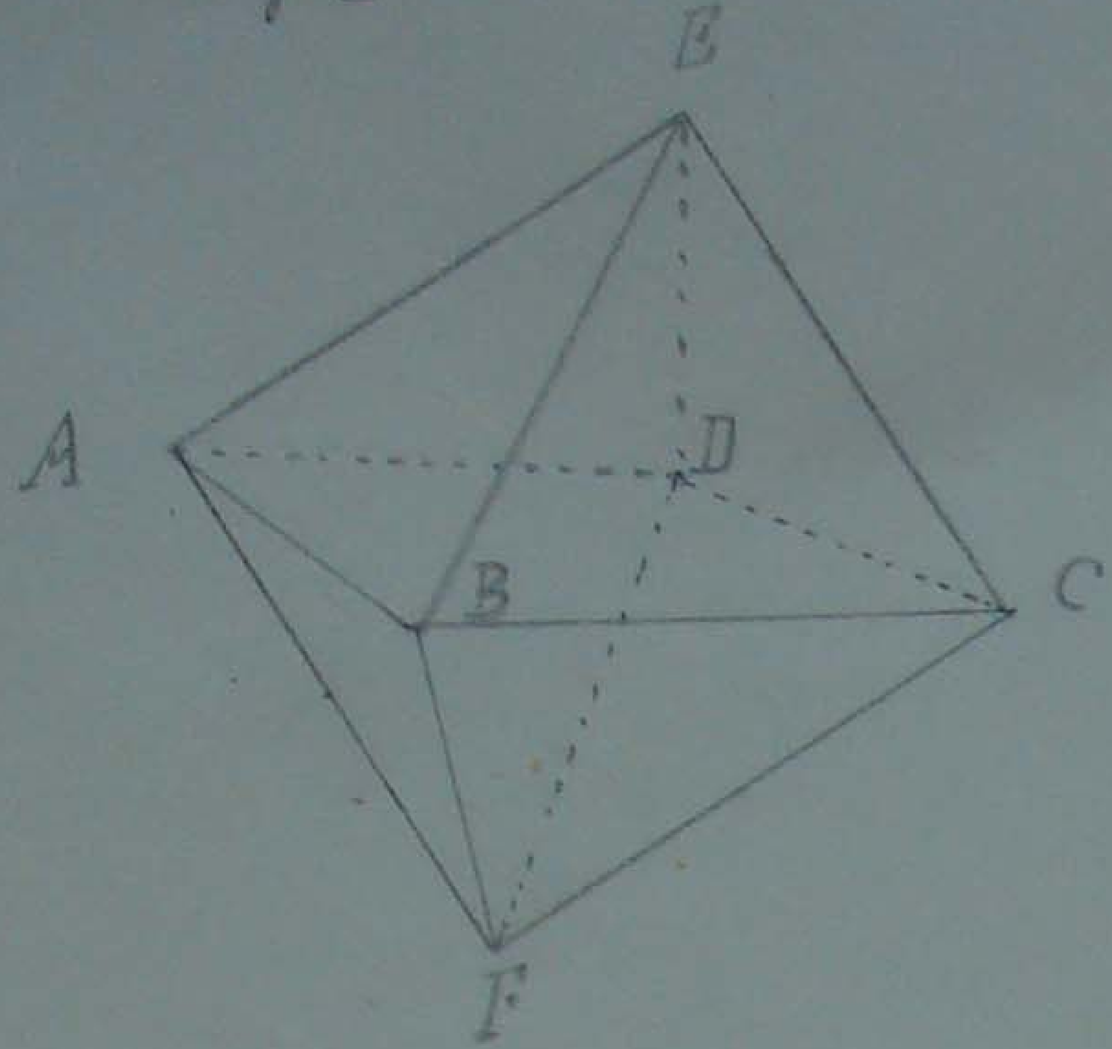
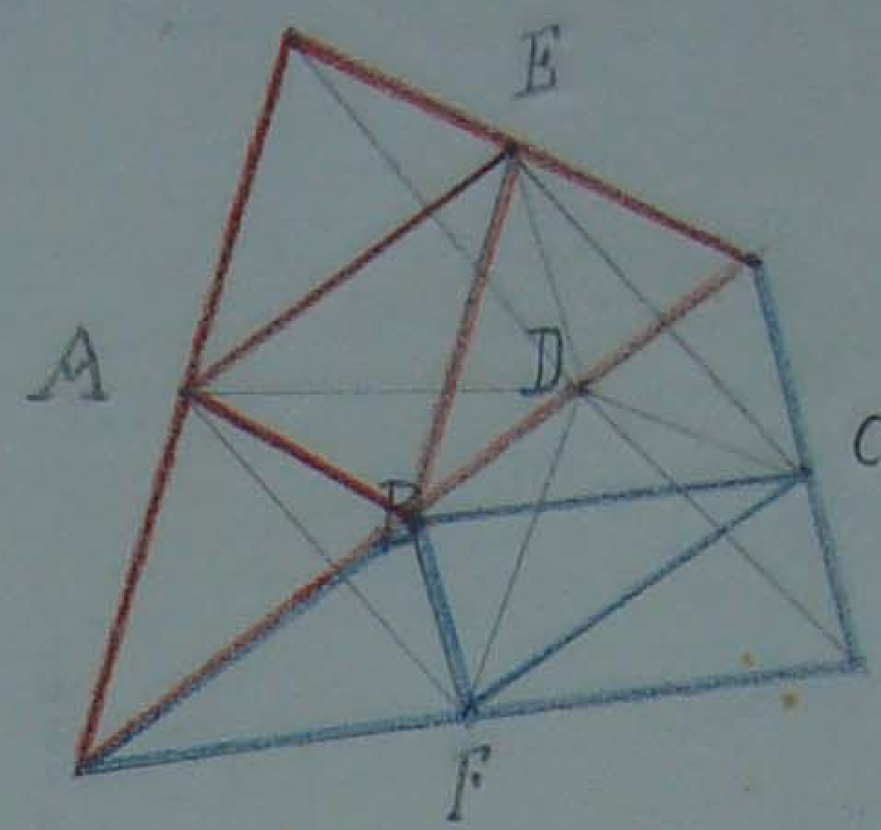


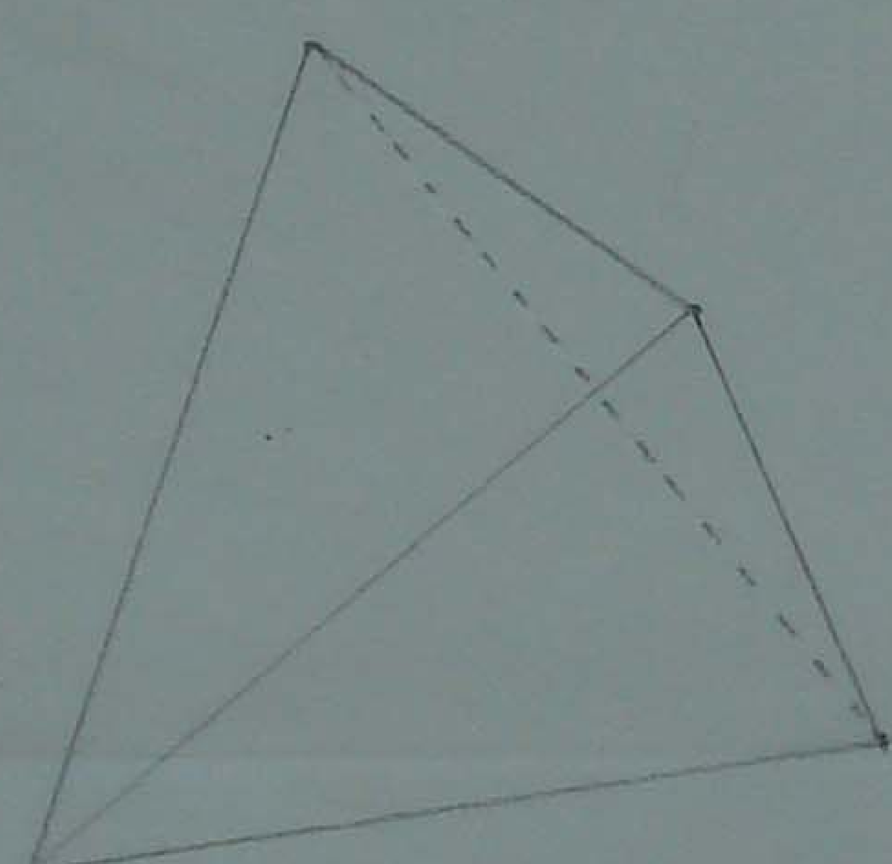
Fig VI



VI a



VI b



VI c.

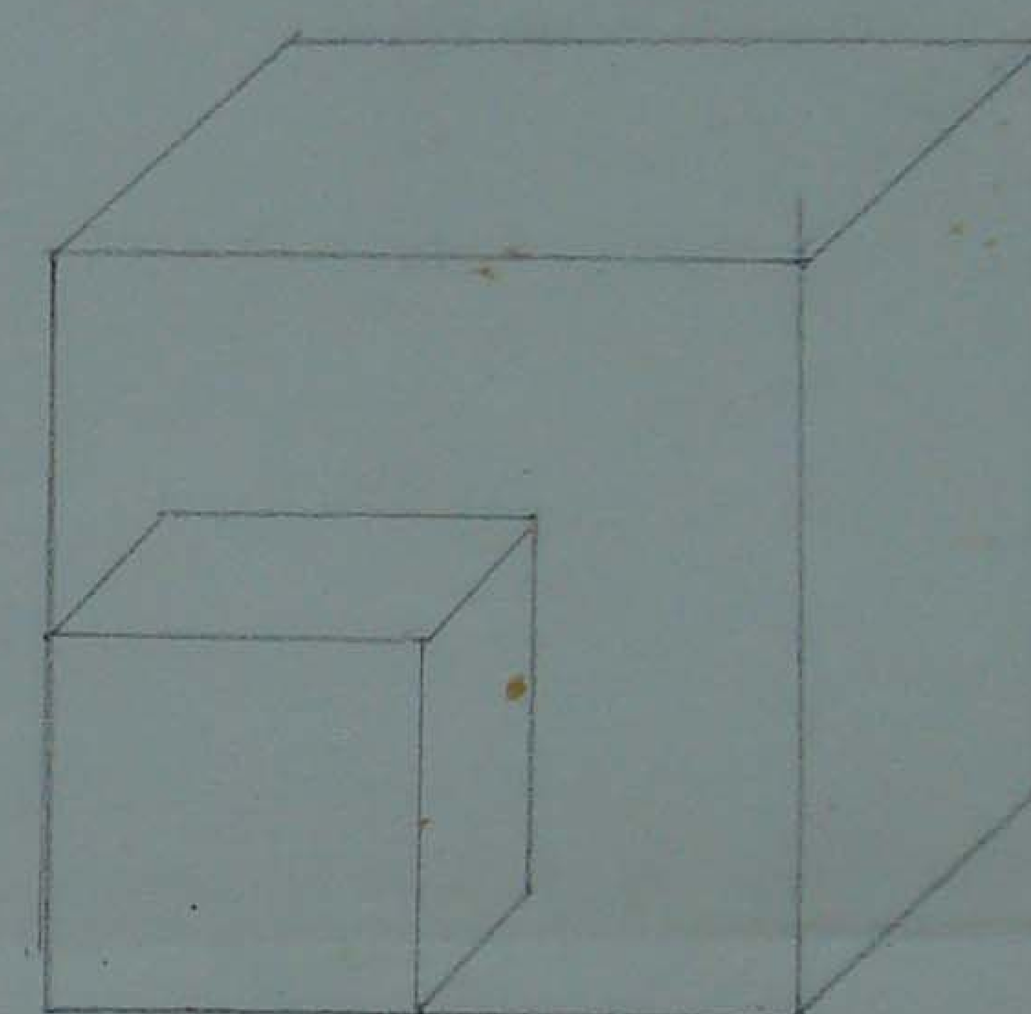


Fig VII

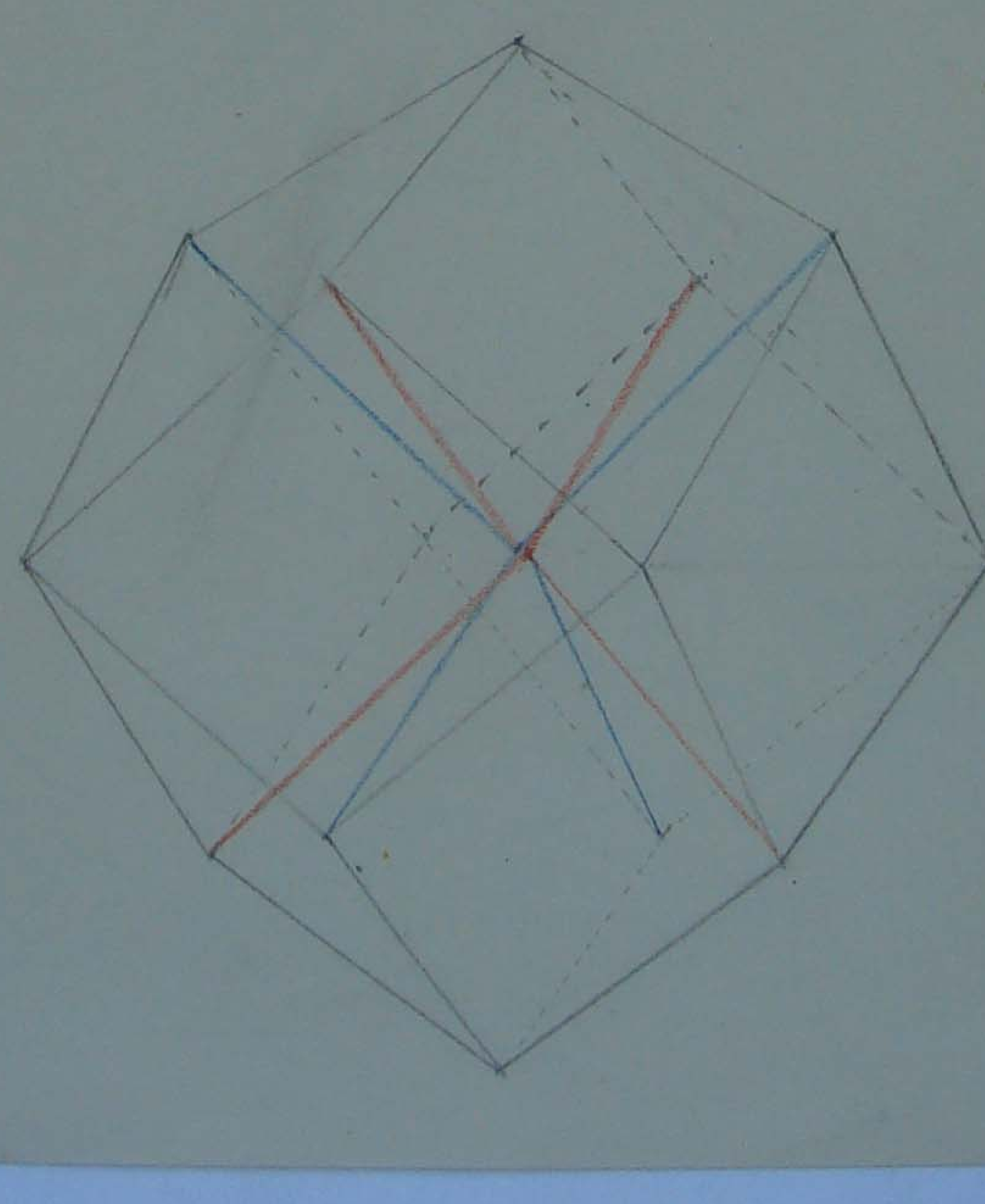


Fig I

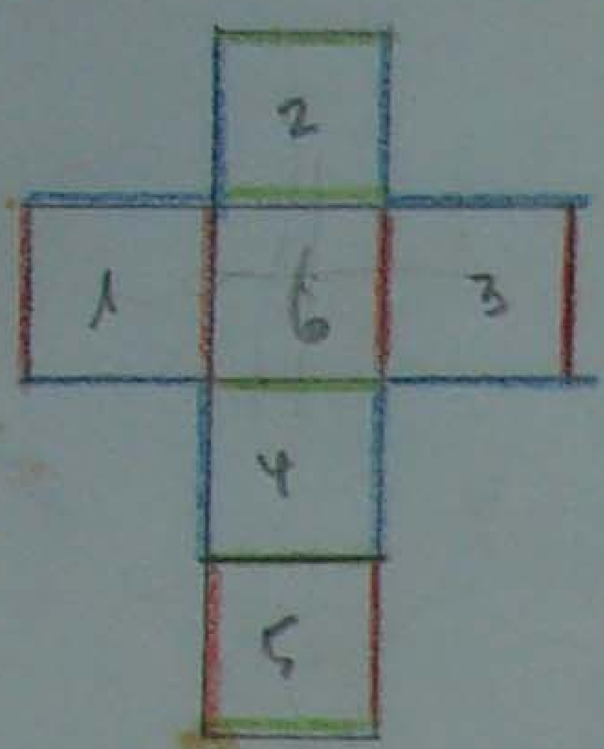


Fig II

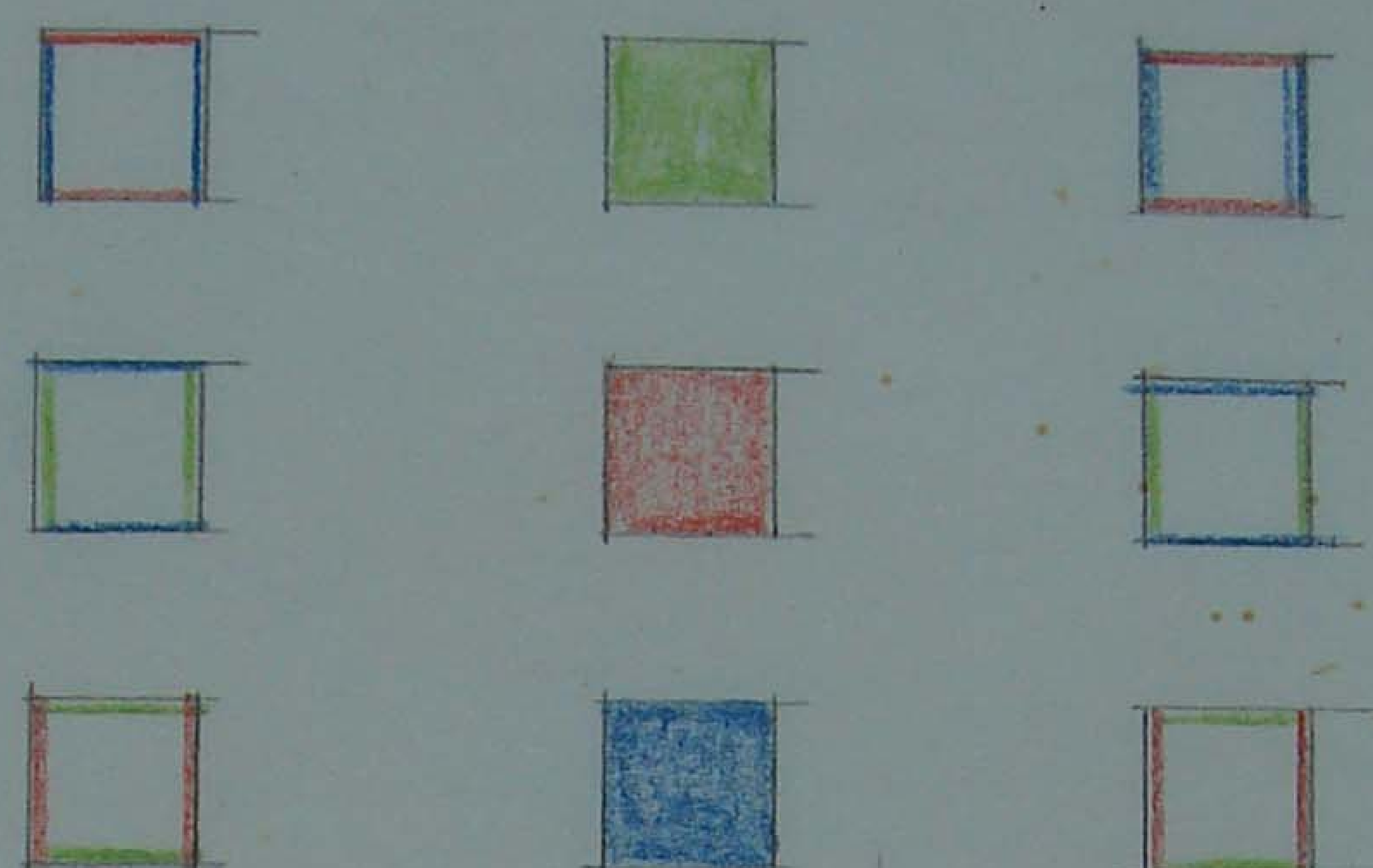
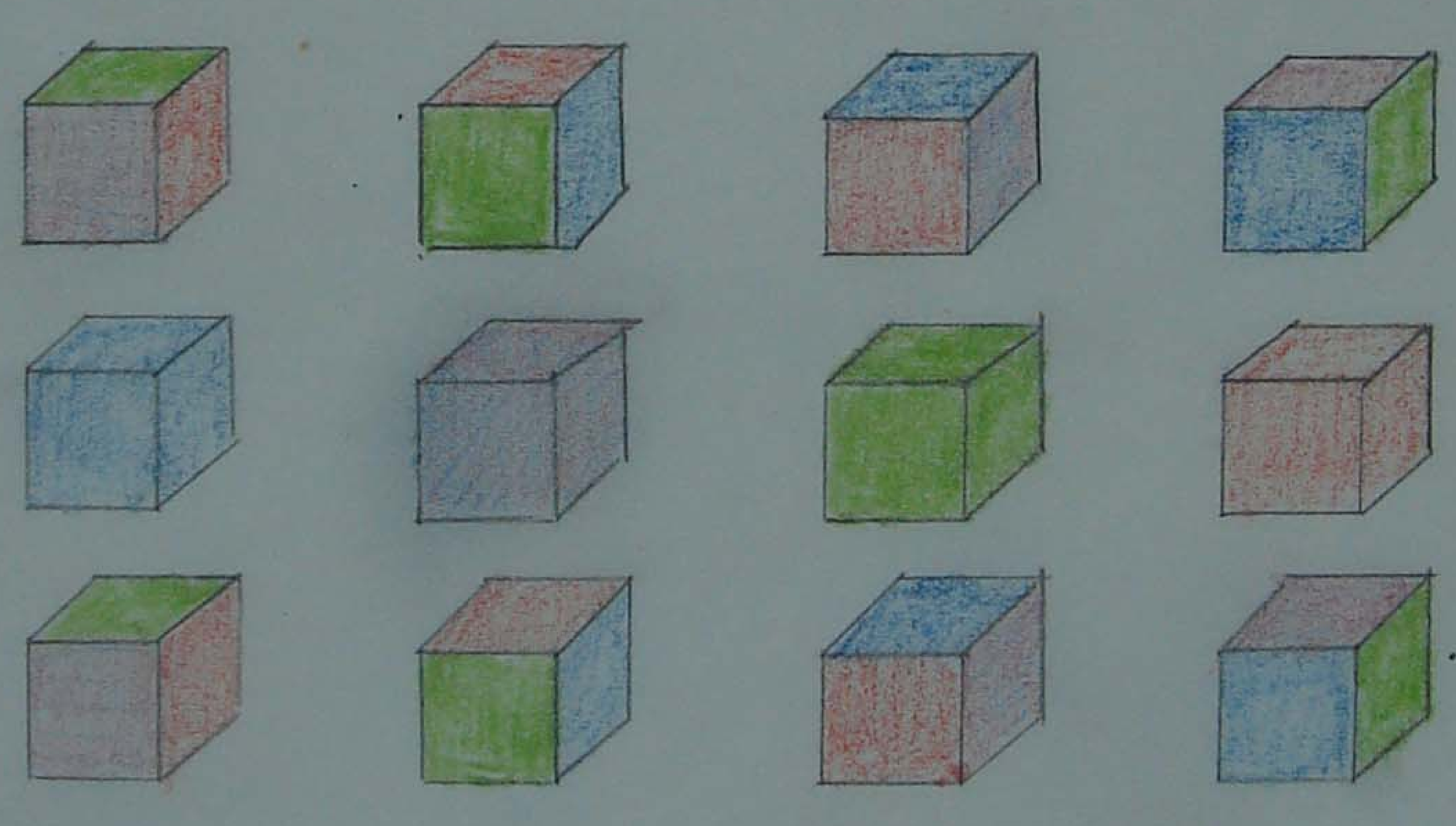
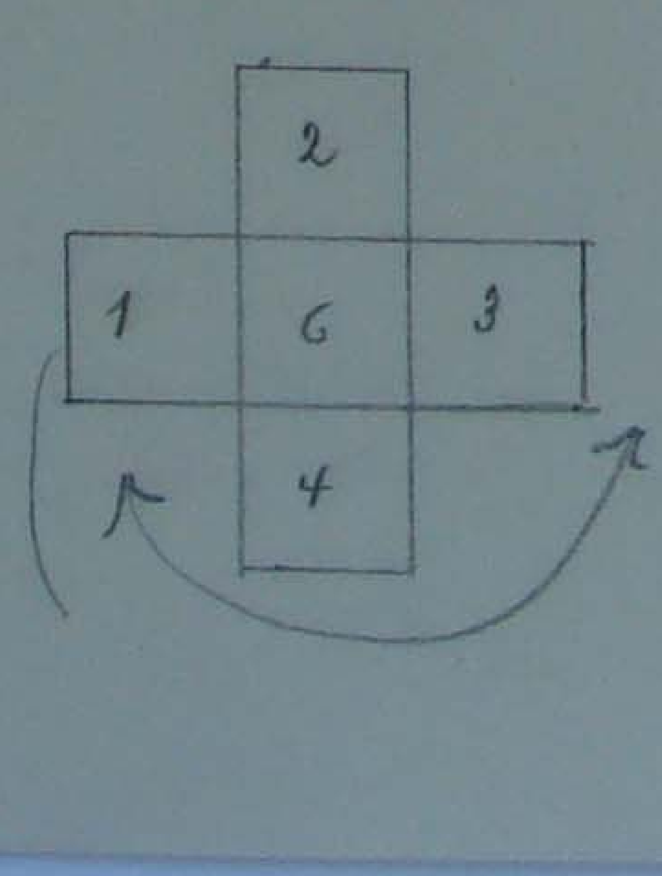


Fig III



IV



V

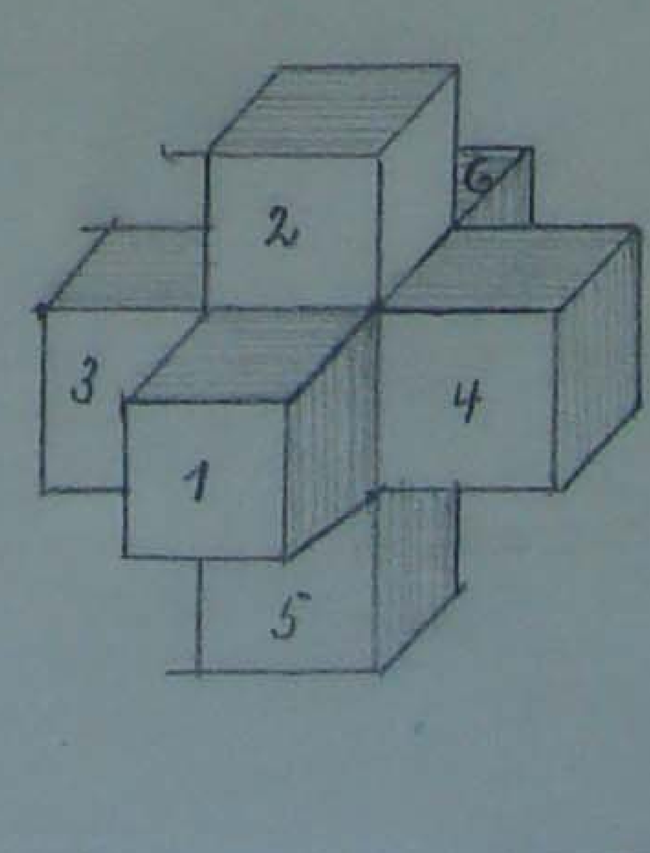


Fig I

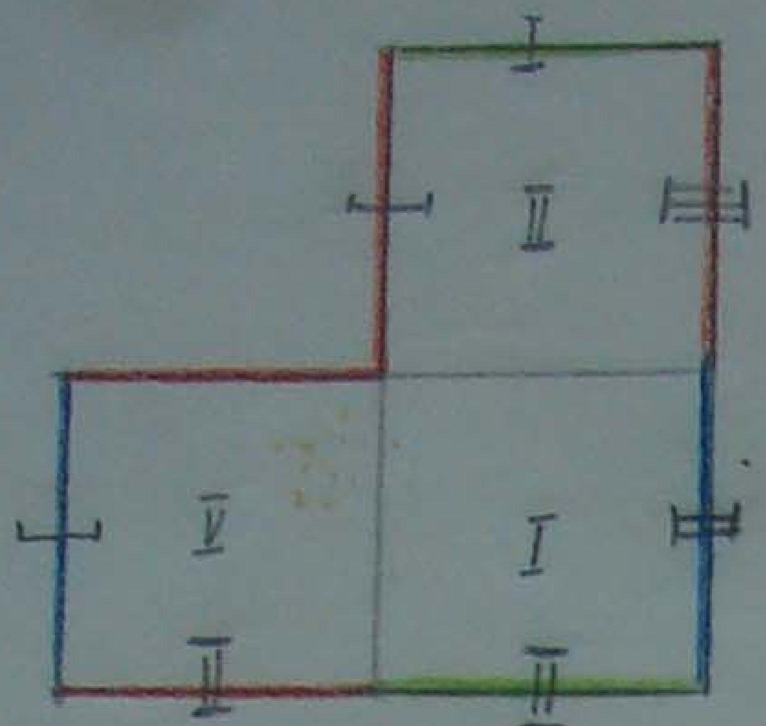
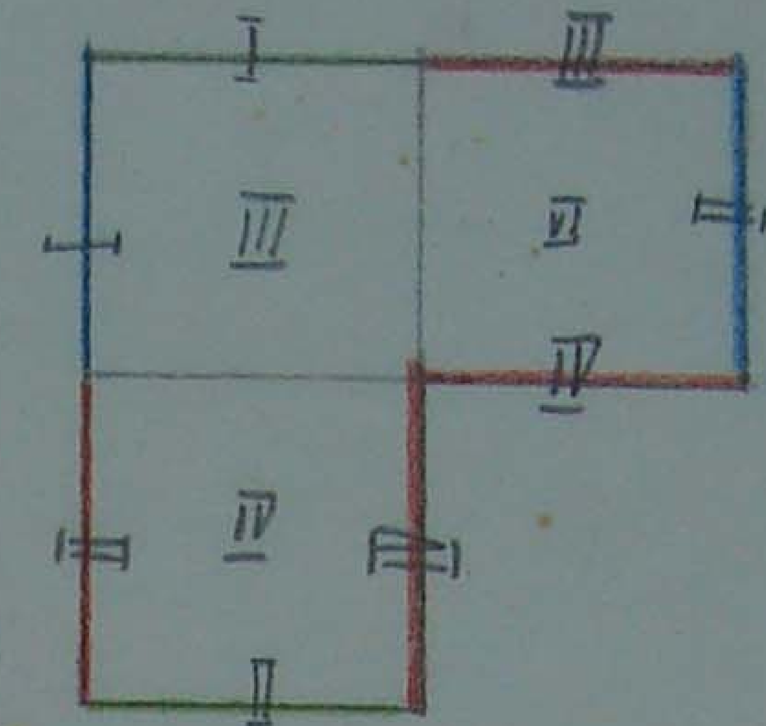
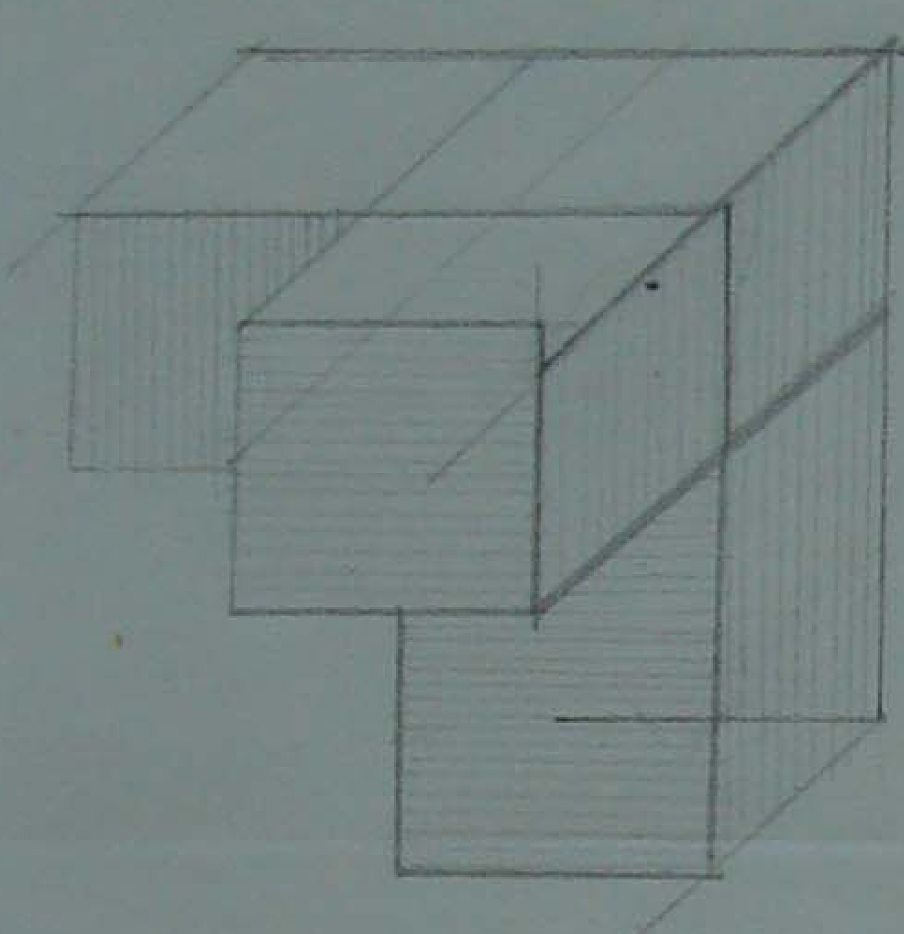


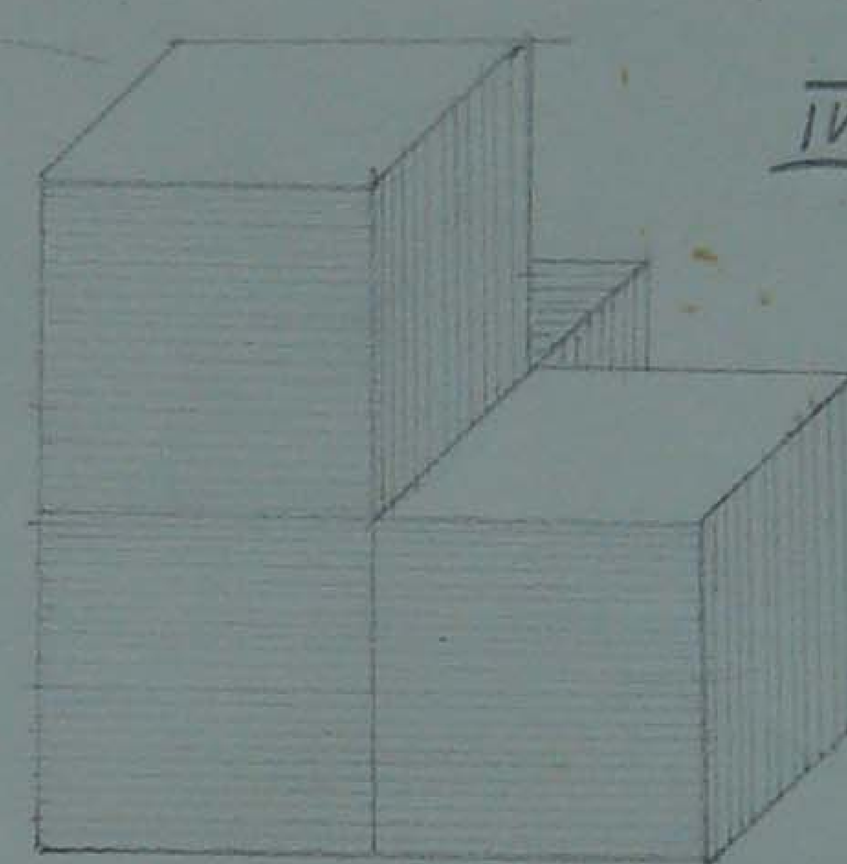
Fig. II



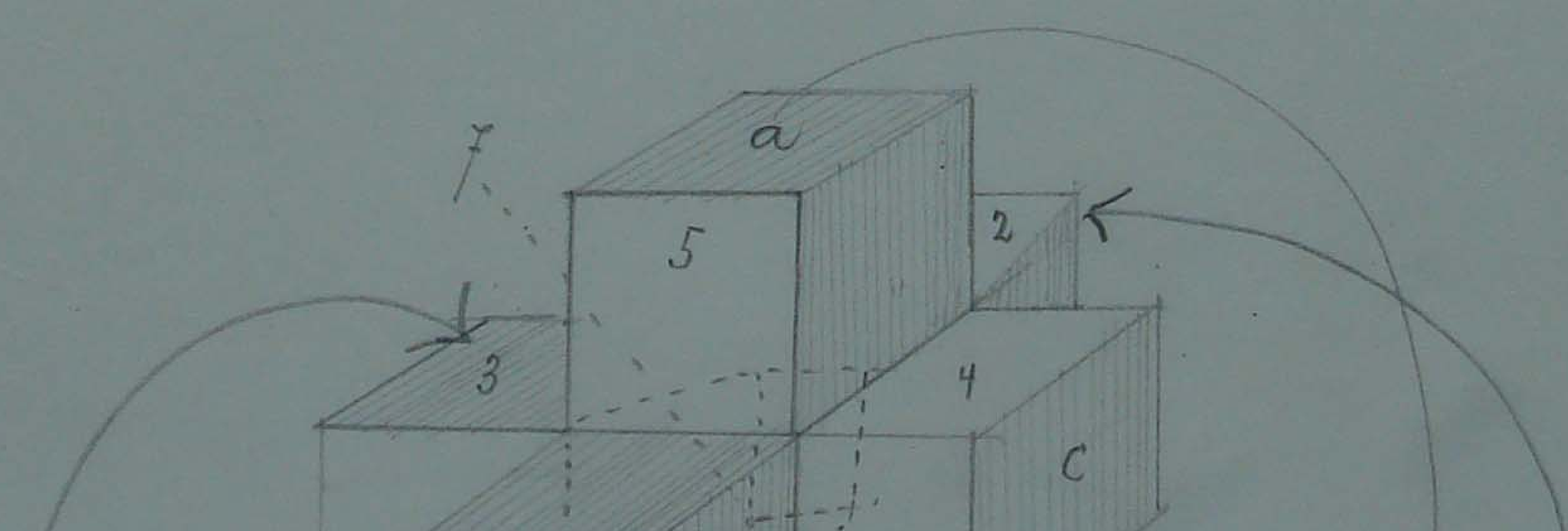
III



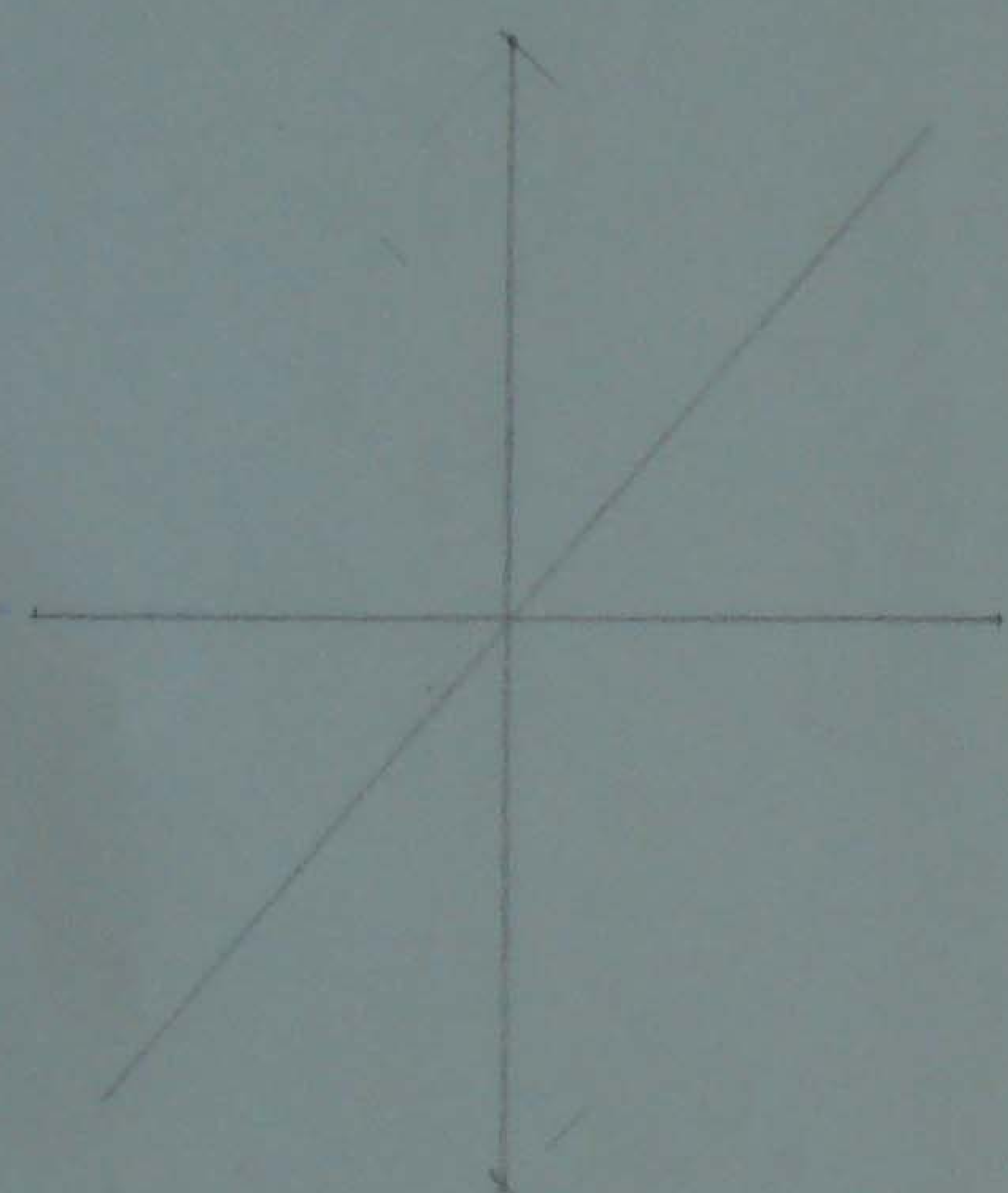
IV



V



I



II