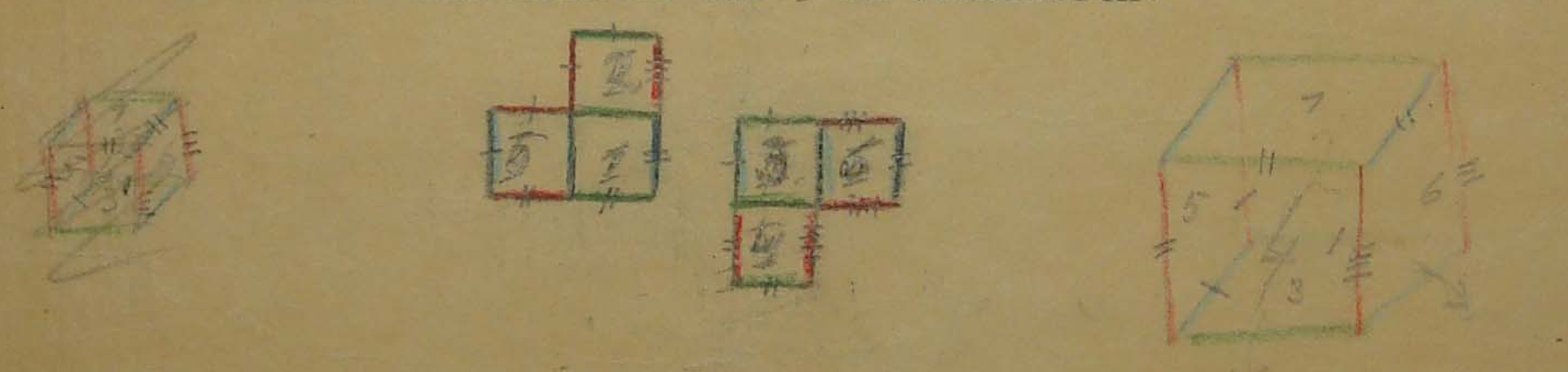


III.

Ueber die vierte Dimension. Berlin, 31. Mai 1905

Wir haben das letzte Mal versucht, uns ein vierdimensionales Raumgebilde zu schaffen. Um es uns zu veranschaulichen, haben wir es auf ein dreidimensionales reduziert. Zunächst haben wir ein dreidimensionales Raumgebilde auf ein zweidimensionales reduziert. Wir setzten statt der Dimensionen Farben ein, sodass ein Würfel längs der 3 Dimensionen in 3 Farben erschien. Dann konnten wir die Grenzen eines Würfels auf die Ebene hinlegen. Wir hatten durch Farben 3 Dimensionen repräsentiert. Wir legten 6 Quadrate in die Ebene hinein; dann stellten wir uns ein Durchgangsquadrat auf, durch welches die Quadrate gefärbt wurden. (So haben wir uns den Würfel vorgestellt). Bei den Flächen hatten wir 2 Grenzfarben und beim Würfel 3 und machen dann eine 4te Farbe als Grenzfarbe hinzu. Wir liessen auch dabei (nach der Analogie des Hinton) die Würfel durch die neue Farbe hindurchgehen und auf der anderen Seite erschienen sie dann wieder in ihrer eigenen Farbe. Nun will ich Jhnen eine andere Analogie geben, um zunächst die 3 Dimensionen wieder auf 2 und dann 4 Dimensionen auf 3 zu reduzieren.

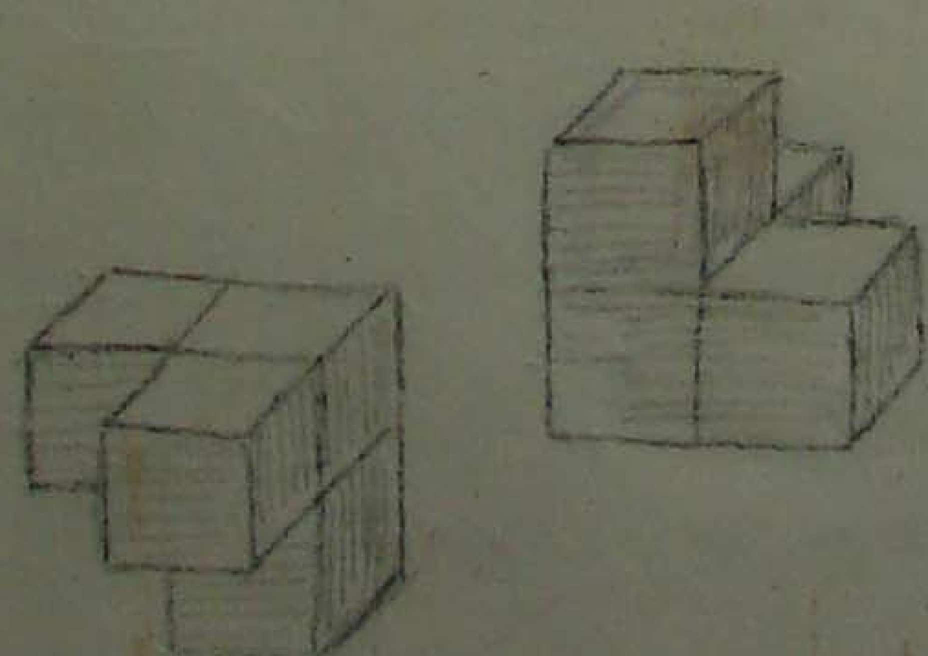


Der Würfel kann an seinen Grenzflächen zusammengesetzt werden aus seinen 6 Grenzquadraten,* statt aber nun, wie neulich, die Ausbreitung hintereinander vorzunehmen, wird sie jetzt auf eine andere Weise geschehen; ich werde auch diese Figur hinzeichnen.

Sie sehen, wir haben jetzt auf diese Weise den Würfel ausgebreitet. 2 Systeme, deren jedes in einer der Ebene liegt und aus je drei Vierecken besteht. Wenn ich nun den Würfel aus diesen 6 Quadraten wieder zusammensetzen will, so muss ich die beiden Abteilungen so übereinanderlegen, dass Quadrat III über I zu liegen kommt. Wenn auf diese Weise I wieder auf 2 und dann 4 Dimensionen auf 3 zu reduzieren.

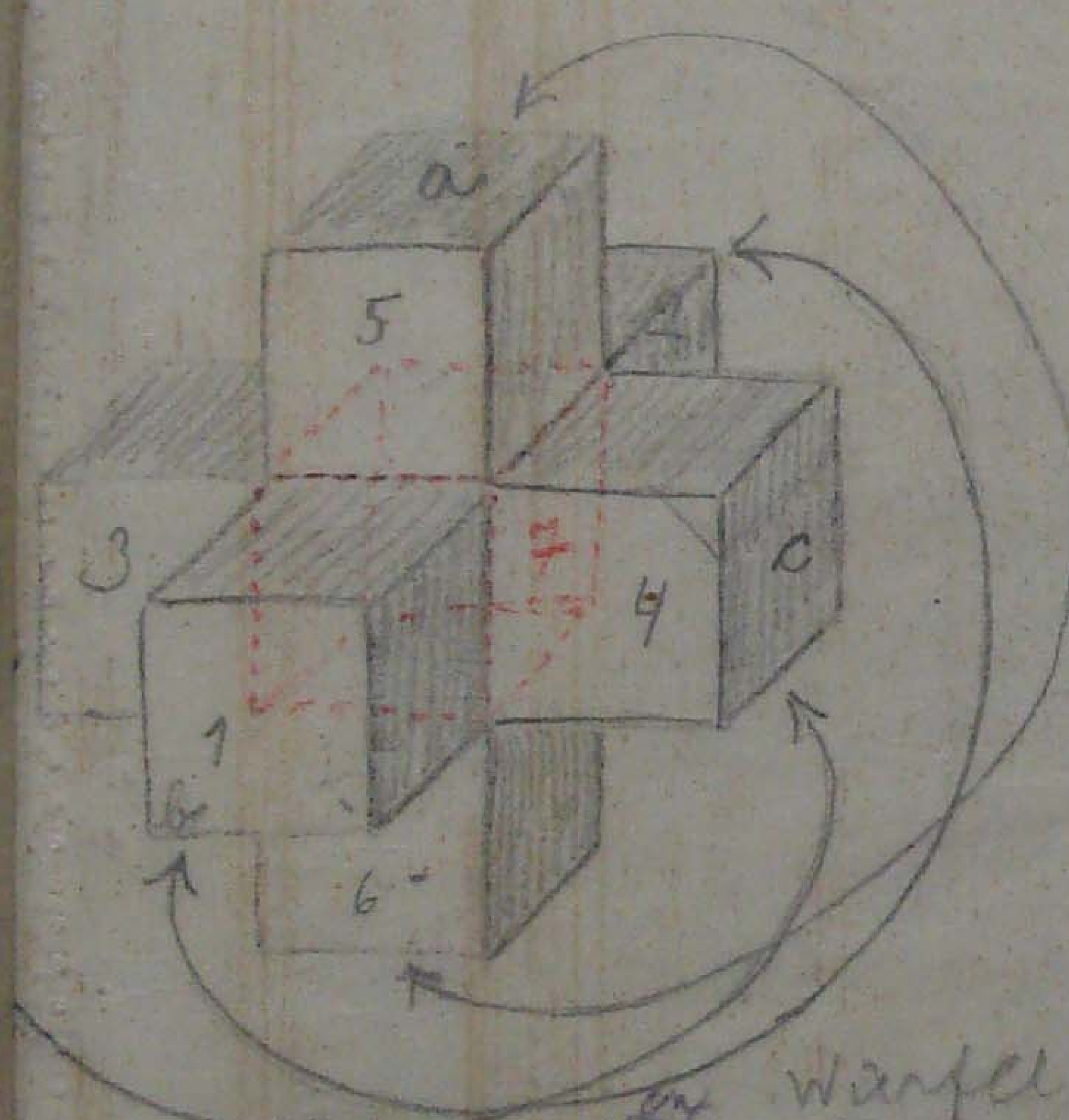
Der Würfel kann an seinen Grenzflächen zusammengesetzt werden aus seinen 6 Quadraten; statt aber nun, wie neulich, die Ausbreitung hintereinander vorzunehmen, wird sie jetzt auf eine andere Weise geschehen; ich werde auch diese Figur hinzeichnen.

Sie sehen, wir haben jetzt auf diese Weise den Würfel ausgebreitet. 2 Systeme, deren jedes in der Ebene liegt und aus je drei Vierecken besteht. Wenn ich nun den Würfel aus diesen 6 Quadraten wieder zusammensetzen will, so muss ich die beiden Abteilungen so übereinander legen, dass Quadrat III über I zu liegen kommt. Wenn auf diese Weise I unten zu liegen kommt, muss ich die Quadrate II und V hochklappen, IV und VI dagegen nach unten ~~hinunter~~klappen. Dabei bekommen wir gewisse korrespondierende Linien, die sich gegenseitig decken; die in der Figur mit gleicher Farbe (und gleicher Strichenzahl) markierten Linien werden zusammenfallen. Das was hier in der Ebene im 2 dimensionalen Raum liegt, fällt in gewisser Weise zusammen, wenn ich in den dreidimensionalen Raum übergehe. Das Quadrat besteht aus 4 Seiten, der Würfel aus 6 Quadraten und ein Tessarakt würde aus 8 Würfeln bestehen; nur handelt es sich darum, dass die 8 Würfel nicht wiederum zu einem Würfel zusammengesetzt werden dürfen, sondern, dass immer einer in entsprechender Weise durch die 4. Dimension durchgehen müsste. Will ich nun dasselbe ~~und~~ mit dem Tessarakt machen, was ich eben mit dem Würfel gemacht habe, so muss ich dasselbe Gesetz ein ~~innehalten~~halten. Wie ~~Wenn~~ ich nun hier 2 Systeme von Quadraten erhielte, so ergibt sich beim Tessarakt dasselbe mit Würfeln, wenn ich den ~~das~~ 4 dimensionale Tessarakt in den 3 dimensionalen Raum abbilde / falte ~~abhalte~~, und dies Gebilde wird dann so aussehen:



Dabei sind jedesmal diese Würfel im 3 dimensionalen Raum so zu nehmen, wie diese Quadrate im 2 dimensionalen Raum. Sie müssen sich nur genau anschauen, was ich hier gemacht habe. Bei dem Abklappen des Würfels in den 2 dimensionalen Raum ergab sich ein System von 6 Quadra=

ten; bei der entsprechenden Prozedur am Tessarakt erhalten wir ein System von 8 Würfeln. Wir haben die Betrachtung für den ~~3~~ 4 dimensionalen Raum ~~durch~~ den ~~4~~ 3 dimensionalen übergeführt. Bei dem abgeklappten Würfel ergaben sich verschiedene korrespondierende Linien, die sich beim späteren Wiederhochklappen deckten. Ein gleiches findet statt mit den Flächen unserer einzelnen Würfel des Tessaraktes. Es würde aber beim Tessarakt die Fläche a des Würfels 5, durch Beobachtung der 4. Dimension, mit der nicht sichtbaren unteren Fläche des Würfels 6 zusammenfallen; in gleicher Weise die Fläche b des Würfels 1 mit dem hinteren Quadrat des Würfels 2 und ebenso ~~dem~~ das Quadrat c des Würfels 4 mit dem entsprechenden des Würfels 3. Es bleibt übrig der von den 6 anderen eingeschlossene ~~siebte~~ siebente 7. Würfel.

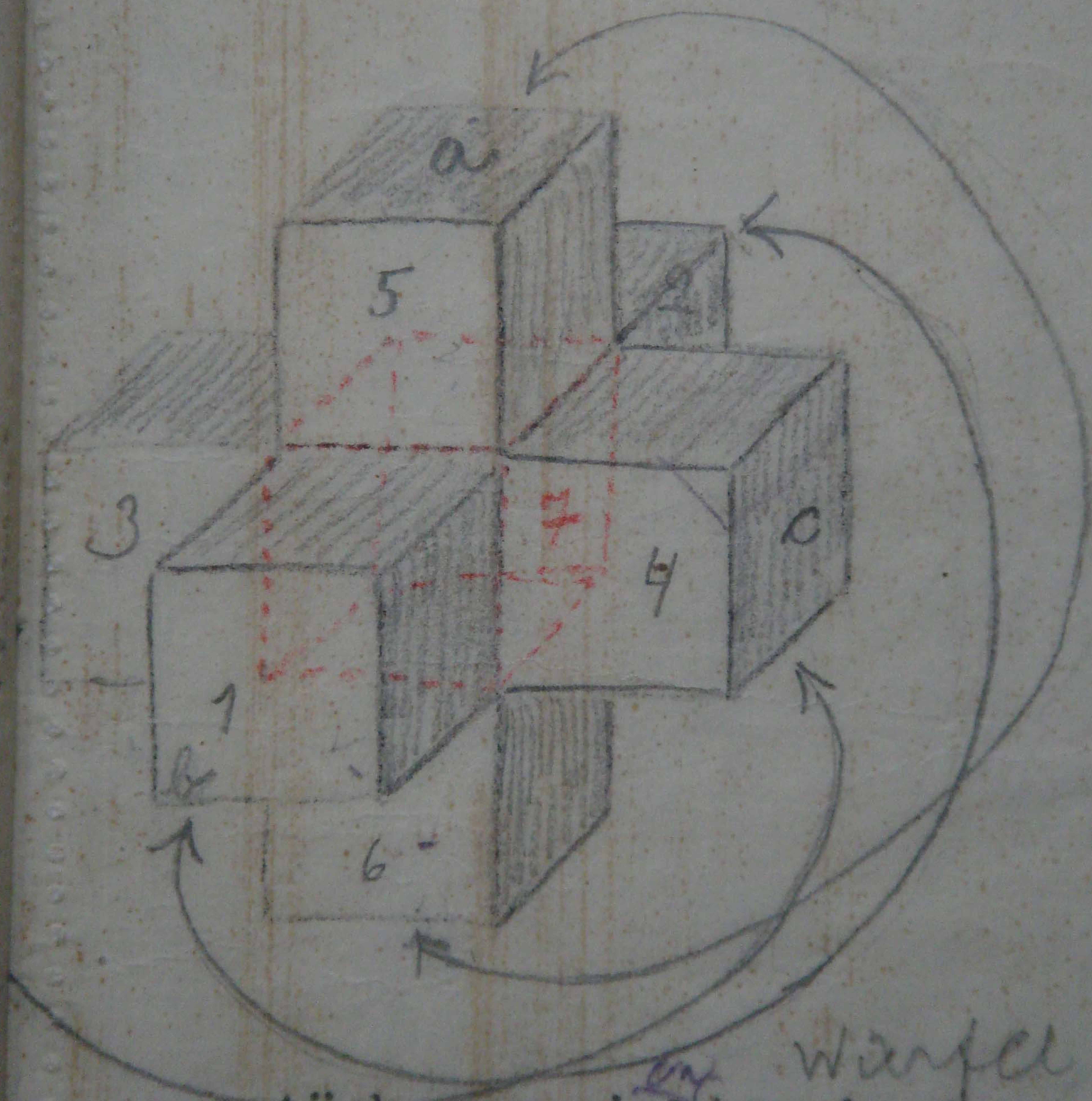


Ebenso wie ein von 4 Quadraten eingeschlossenes fünftes Quadrat - wie wir dies an der entsprechenden Figur des vorigen Vortrags gesehen haben - dem nur 2 dimensional schauenden Wesen unsichtbar bleibt, so ist dies hier mit dem siebenten Würfel der Fall; er bleibt dem 3 dimensional~~en~~ schauenden Auge verborgen. Diesem siebenten Würfel entspricht beim Tessarakt ein achter Würfel, der, da wir hier einen 4 dimensionalen Körper haben, als Gegenstück zum siebenten Würfel in der vierten Dimension liegt.

Es ist auf eine andere Weise kaum möglich, eine Anleitung zu geben, wie man sich ein 4 dimensionales Gebilde zu denken hat. Nun möchte ich noch auf eine andere Weise zu sprechen kommen, die Ihnen vielleicht auch noch die Möglichkeit geben wird, das besser einzusehen, um was es sich handelt. Dies hier ist ein Oktaeder, das von 8 Dreiecken begrenzt ist. Wenn Sie sich dies Gebilde hier vorstellen, so bitte ich Sie, ~~mit~~ mir in Gedanken folgende Prozedur vorzunehmen. Sie sehen, hier ist immer eine Fläche von einer anderen geschnitten - hier (z. B. in A B) stossen 2 Seiten (Flächen) zusammen und hier (E B) stossen 2 zusammen. Der ganze Unterschied zwischen Oktaeder und Würfel ist der Schnittpunkt der Winkel; wenn sich Flächen so schneiden - wie beim Würfel - so ent=

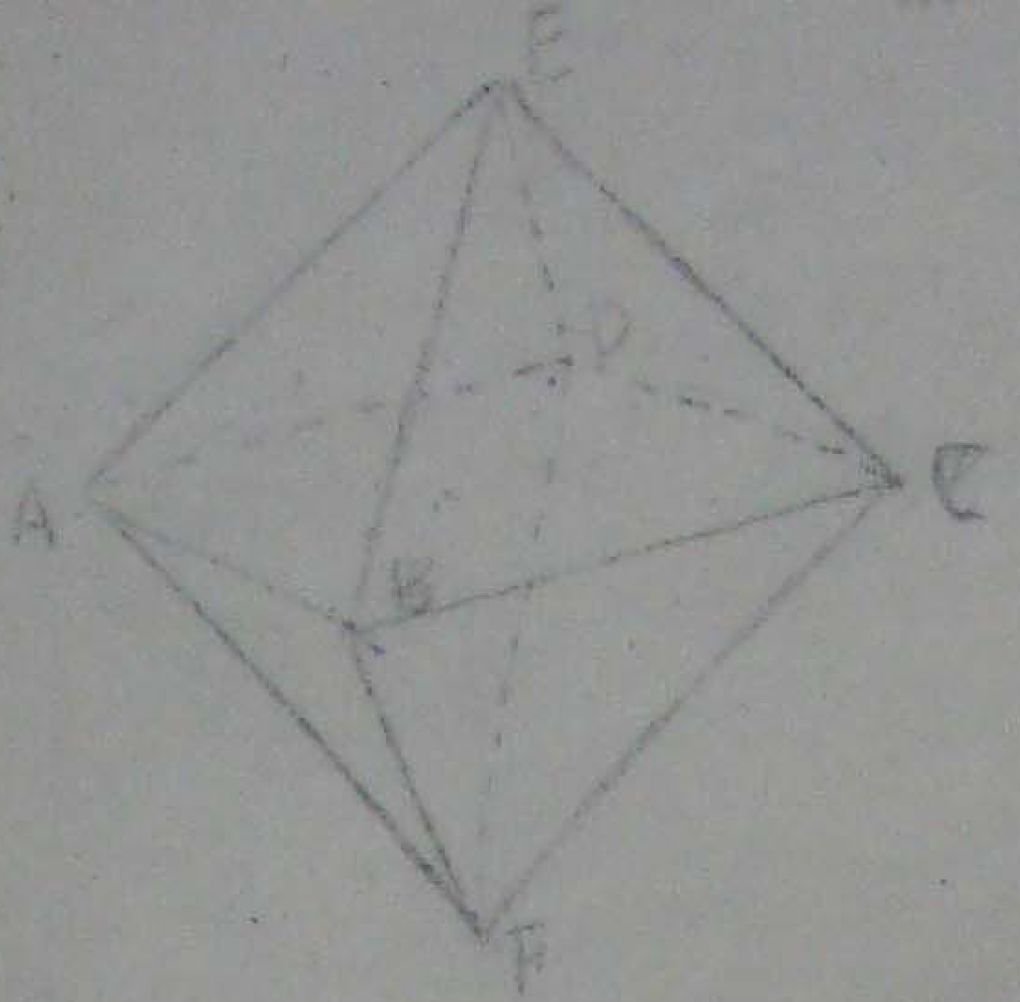
chenden des Würfels 3. Es bl

Siebente
schlossene ~~siebte~~ Würfel.
7.



en Würfel
stück zum siebten in der vie

Diese Zeichnung kommt auf S. 17 rechts!



steht ein Würfel; wenn sie sich aber so schneiden wie hier, so entsteht ein Oktander. Es handelt sich darum, dass wir Flächen unter den verschiedensten Winkeln sich schneiden lassen, dann bekommen wir die verschiedensten Raumgebilde.

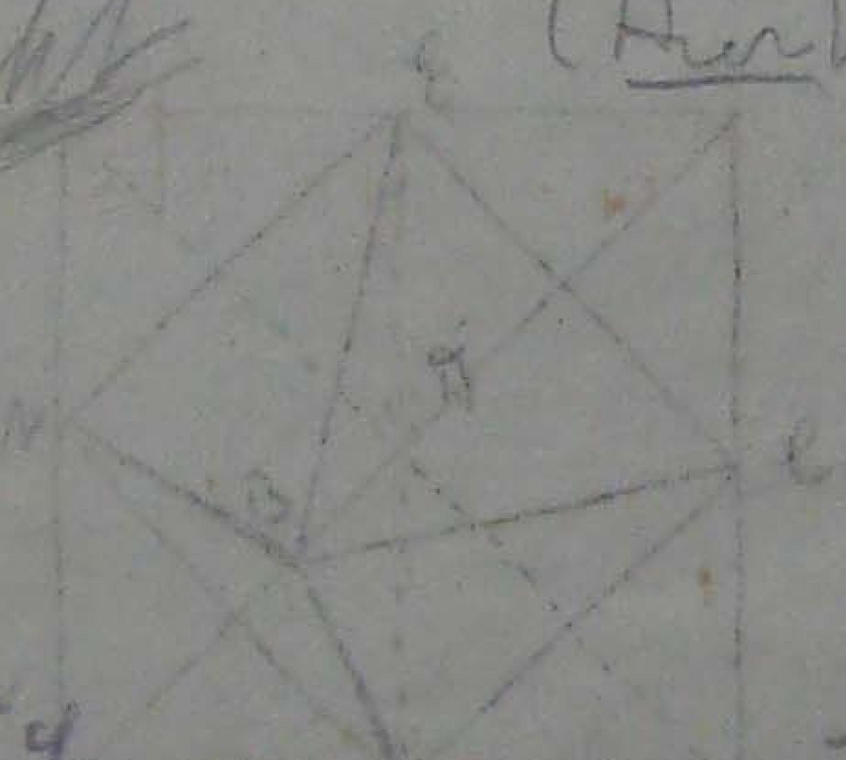
Denken Sie sich nun, wir könnten hier dieselben Flächen des Oktanders auch in anderer Weise zum Schneiden bringen.

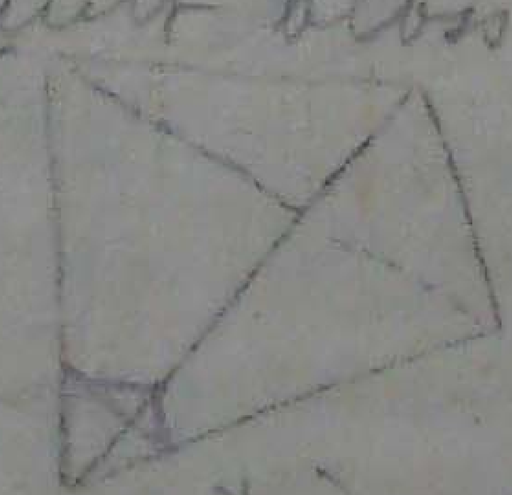
(Γ aus Zettel die fehlenden Sätze nehmen!)

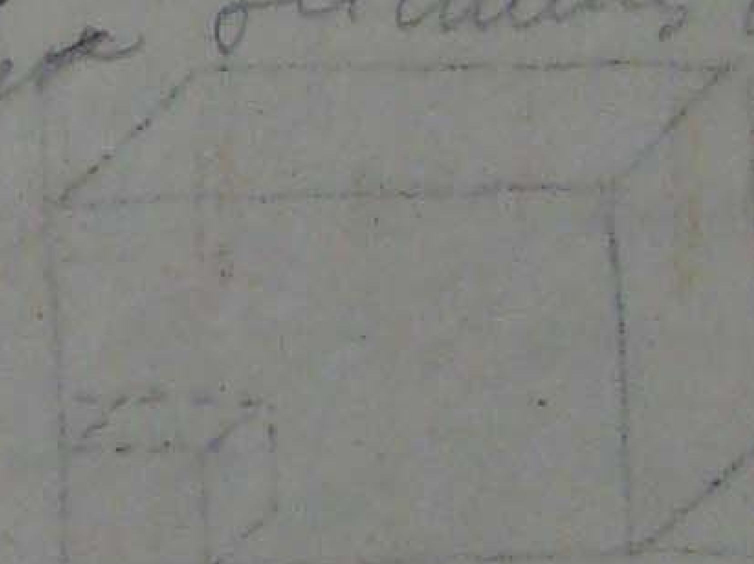
Denken Sie sich diese Fläche hier - z. B. A E B nach allen Seiten fortgesetzt und die untere hier B C F auch, dann ebenso die rückwärts liegenden A D F und E D C und rückwärts E A D und D C F und die die dann bleiben, die geben dieses Tetraeder, das man auch die Hälfte eines Oktaeders nennt, das deshalb die Hälfte eines Oktaeders ist, weil es die Hälfte der Flächen des Oktaeders zum Schnitte bringt. Beim Oktaeder ist das ganz leicht vorzustellen.

nicht

(Hier kommt bloss die Zeichnung links!)







Diese beiden kommen auf S. 19!

Wenn Sie sich den Würfel in derselben Weise halbiert denken, wenn Sie also hier eine Fläche mit der entsprechenden anderen sich schneiden lassen, so bekommen Sie immer wieder einen Würfel. Die Hälfte eines Würfels ist wieder ein Würfel. Daraus möchte ich einen wichtigen Schluss ziehen, will aber dazu noch dies zur Hilfe nehmen. Hier habe ich einen Rhombendodekaeder. (X) Sie sehen, dass die Flächen unter gewissen Winkeln aneinander grenzen. Es ist nun hier zu gleicher Zeit ein System von 4 Drähten zu sehen, welche ich Achsendrähte nennen möchte und die zueinander gegenläufig sind. Diese Drähte stellen nun in einer ähnlichen Weise ein System von Achsen dar, wie Sie es sich vorstellten, dass am Würfel ein System von Achsen ist. Den Würfel bekommt man, wenn man bei einem System von 3 aufeinander senkrecht stehenden Achsen dadurch Schnittflächen hervorbringt, dass Stauungen eintreten.

11 (X) Hier für die Zeichnung von S. 23 Platz lassen!

 11

Tessarakte wie im Vortrag IV (Fig 2) (Fig S 23)

Lässt man die Achsen unter anderen Winkeln sich schneiden, so bekommt man ein anderen Raumgebilde. Das Rhomben= dodekander hat Achsen, die sich unter= ~~einander~~ anderen als rechten Winkel schneiden. Der Würfel gibt halbiert sich selbst - aber nur beim Würfel trifft dies zu. Das Rhombendodekander in seinen halben Flächen zum Schnitt gebracht, gibt ebenfalls ein anderes Raumgebilde.

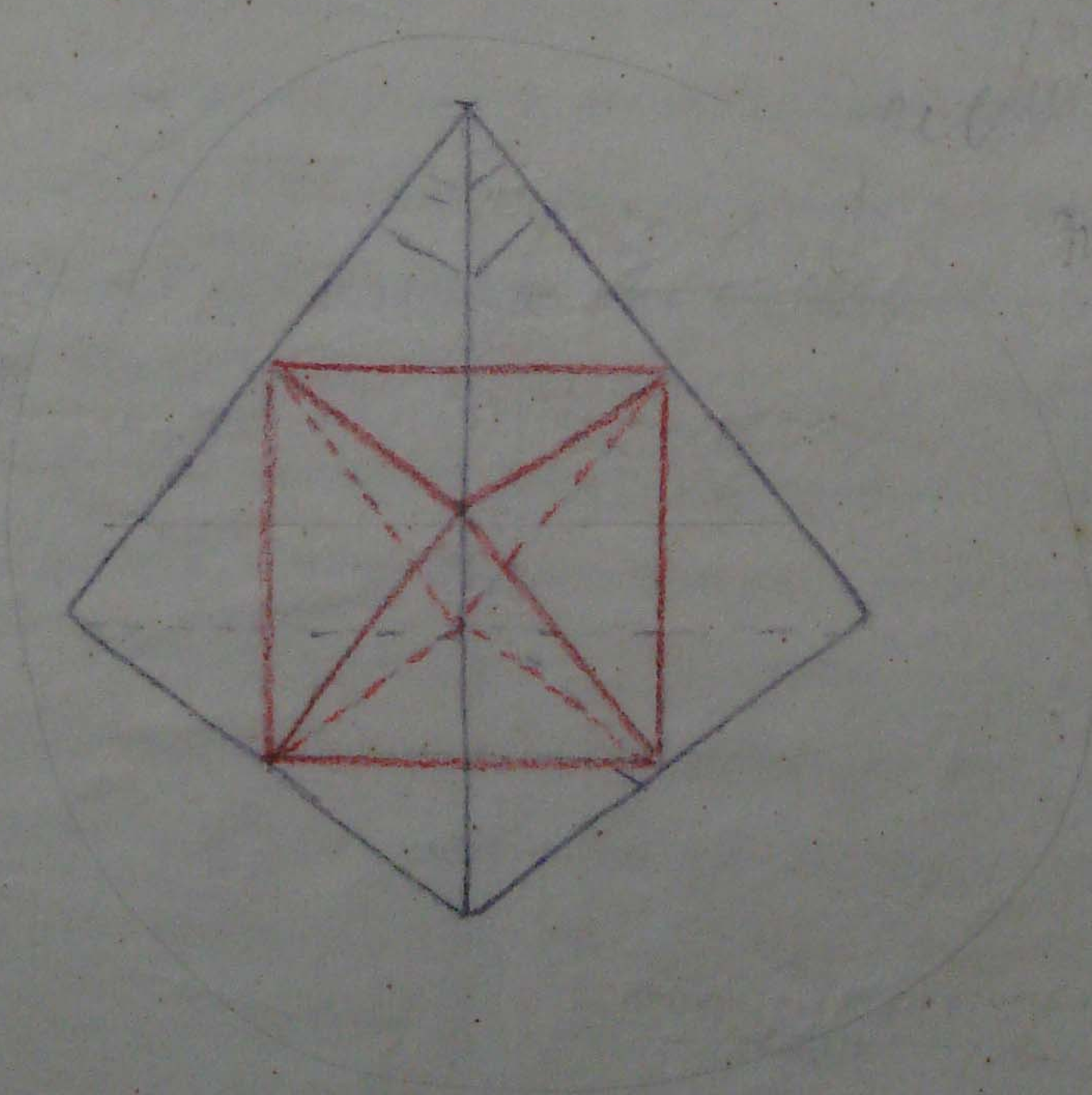
Nehmen wir nun das Verhältnis des Oktanders zum Tetrander und zwar will ich Jhnen sagen, was da gemeint ist. Das tritt klar hervor, wenn wir allmählich das Oktander in das Tetrander übergehen lassen. Nehmen wir zu diesem Zwecke ein Tetrander, dem wir (wie an der Spitze angedeutet) die Ecken abschneiden und setzen wir dies fort, bis die Schnittflächen sich an den Kanten des Tetranders begegnen - dann bleibt übrig das angedeutete Oktander. So bekommen wir aus einem Raumgebilde, das durch 4 Flächen begrenzt ist, ein 8 seitiges Gebilde, wenn wir unter entsprechenden Winkeln die Ecken abschnei= den. Dasselbe, was ich hier mit dem Tetrander gemacht habe, können sie wiederum nicht mit den Würfeln machen. Der Würfel hat ganz besondere Eigenschaften, nämlich, dass er das Gegenstück ist zum 3 dimensiona= len Raum. Wenn sie zu den drei Achsen senkrecht stehende Flächen haben, so bekommen sie unter allen Umständen einen Würfel. Wenn man ~~mit dem~~ als den Würfel den theoretischen Würfel bezeichnen will, so sagt man, der Würfel ist überhaupt das Gegenstück zu dem 3 dimensionalen Raum. So wie das Tetrander das Gegenstück ist zum Oktrander, wenn ich die Seiten des Oktranders zu bestimmten Schnitten bringe, so ist der einzelne Würfel das Gegenstück zum ganzen Raum. Wenn sie sich den ganzen Raum positiv denken, so ist der Würfel negativ. Der Würfel ist zum ganzen Raum polar, Raum er hat im physischen ~~Raum~~ Würfel sein ihm eigentlich korrespondierendes Gebilde.

Nehmen sie einmal jetzt an, ich würde den Raum nicht dreidimen= sional begrenzen, sondern ich würde ihn so begrenzen, dass ich 4 Kugeln ihn begrenzen lasse. Jch begrenze zunächst den 2 dimensiona=

len Raum dadurch, dass ich 4 ineinandergehende Kreise habe. Sie können sich nun vorstellen, dass diese Kreise immer grösser und grösser wer= den; dann werden sie mit der Zeit alle in ~~eine parallel~~ gerade Linie übergehen. Sie bekommen dann 4 sich schneidende Gerade und statt der 4 Kreise ein Quadrat. Denken sie sich nun statt der Kreise Kugeln und zwar 6, sodass sie eine Art von Maulbeere bildet. Wenn sie sich mit den Kugeln dasselbe denken, wie mit den Kreisen, dass sie immer grös= sere Durchmesser bekommen, so werden diese 6 Kugeln zuletzt ebenso die Begren= zungsflächen eines Würfels ~~werden~~, wie die 4 Kreise zu Begrenzungsli= nien eines Quadrats werden.

Der Würfel ist jetzt dadurch entstanden, dass wir 6 Kugeln hatten, die flach geworden sind. Es ist also der Würfel nichts anderes als der Spezialfall für 6 ineinandergehende ~~Kreise~~ Kugeln, wie das Quadrat nichts anderes ist als der Spezialfall für 4 ineinandergehende Kreise.

Wenn sie sich klar sind, dass sie sich diese 6 Kugeln so vorzustel= len haben, dass sie, in die Ebene gebracht, unseren früheren Quadraten entsprechen - wenn sie sich ein absolut rundes Gebilde übergehend den= ken in ein gerades, so bekommen Sie die einfachste Raumform. Der Würfel kann vorgestellt werden als die ~~Vereinfachung~~ Verflachung von 6 ineinander gescho= bene Kugeln. Sie können von einem Punkte eines Kreises sagen, dass er, um zu einem anderen zu kommen, durch die zweite Dimension hindurchgehen muss. Haben Sie aber den Kreis so gross werden lassen, dass er eine gerade Linie bildet, so kann dann jeder Punkt zu jedem anderen kommen durch die erste Dimension. So lange jedes von den 4 Gebilden ein Kreis ist, ist es zweidimensional; jedes Grenz= gebilde, wenn es eine Gerade geworden, ist eindimensional. Jede Grenz= fläche eines Würfels ist aus einem dreidimensionalen Gebilde entstanden und nur dadurch entstanden, dass die ~~dritte Dimension~~ drei Dimensionen auf 2 reduziert sind, eine Dimension als eingebüsst gedacht. So ist die zweite Dimension entstanden durch Einbüssung der Tiefendimension. Wie wir ein dreidimen= sionales Gebilde mit zweidimensionalen Grenzen erhalten, wenn wir drei= dimensionale Grenzgebilde auf zweidimensionale reduzieren, so müssen Sie daraus schliessen, dass wir, wenn wir den dreidimensionalen Raum betrachten, eine jede Richtung als verflacht uns zu denken haben - verflacht aus einem unendlichen Kreis, sodass Sie, wenn Sie in der ei= nen Richtung fortschreiten könnten, aus der anderen zurückkommen würden. So ist eine jede Raumdimension dadurch entstanden, dass sie die ent= sprechenden anderen verloren hat. Jn unserem dreidimensionalen Raum steckt ein dreiachsiges System; es sind drei aufeinander senkrecht stehende Achsen, welche die anderen Dimensionen eingebüsst haben, und ~~die~~ dadurch sind sie flach geworden. - Sie bekommen also den dreidimensionalen Raum, wenn Sie eine jede Richtung gerade biegen. Jeder Raumteil könnte in sich wiederum gekrümmt werden: Krümmen Sie das eindimensionale Gebilde, so bekommen Sie ein zweidimensionales; durch Krümmen des zweidimensionalen bekommen Sie ein dreidimensionales. Krümmen Sie endlich das dreidimensionale Gebilde, so bekommen Sie das vierdimensionale, sodass das Vierdimensionale auch vorgestellt werden kann als ein gekrümmtes Dreidimensionales. - Und damit komme ich von dem Toten zum Lebendigen: durch dieses Krümmen können Sie den Uebergang vom Toten zum Lebendigen finden. Der vierdimensionale Raum ist ~~also~~ so spezialisiert, dass er flach geworden ist.



IV. Vortrag gehalten am 7. Juni 1905 in Berlin

N. M. Scholl

IV Vorträge über
„Die IV Dimension"
in Berlin
vom 17.05 – 07.06.1905