Über die vierte Dimension.

3. Vortrag

Berlin, den 31. Mai 1905.

Wir haben das letzte Mal versucht, uns ein vierdimensionales Raumgebilde zu schaffen. Um es uns zu veranschaulichen, haben wir es auf ein dreidimensionales reduziert. Zunächst haben wir ein dreidimensionales Raumgebilde auf ein zweidimensionales reduziert. Wir setzten statt der Dimensionen Farben ein, sodass ein Würfel längs der drei Dimensionen in 3 Farben erschien. Dann konnten wir die Grenzen eines Würfels auf die Ebene hinlegen. Wir hatten durch Farben drei Dimensionen repräsentiert. Wir legten 6 Quadrate in die Ebene hinein, dann stellten wir uns ein Durchgangsquadrat auf, durch welches die Quadrate gefärbt wurden. Bei drei Flächen hatten wir 2 Grenzfarben u. beim Würfel 3, u. dann nahmen wir eine vierte Farbe als Grenzfarbe hinzu. Wir liessen auch dabei nach der Analogie des Hinton die Würfel durch die neue Farbe hindurchgehen, u. auf der andern Seite erschienen sie dann wieder in ihrer eigenen Farbe. Nun will ich Ihnen eine andere Analogie geben, um zunächst die 3 Dimensionen wieder auf 2 u. dann vier Dimensionen auf 3 zu reduzieren. Der Würfel kann an seinen Grenzflächen so zusammengesetzt werden aus seinen 6 Grenzquadraten, statt aber nun wie neulich die Ausbreitung hintereinander vorzunehmen, wird sie jetzt auf eine andere Weise geschehen; ich werde auch diese Figur hinzeichnen. (Zeichnung 9). Sie sehen wir haben jetzt auf diese Weise den Würfel ausgebreitet: 2 Systeme, deren jedes in der Ebene liegt u. aus je drei Vierecken besteht. Wenn ich nun den Würfel aus diesen 6 Quadraten wieder zusammensetzen will, so muss ich die beiden Abteilungen so übereinanderlegen, dass Quadrat VI über Quadrat I zu liegen kommt. Wenn auf diese Weise Quadrat I unten zu liegen kommt, muss ich die Quadrate II u. V hochklappen, die Quadrate IV u. VI dagegen nach unten hinunterklappen. Dabei bekommen wir gewisse korrespondierende Linien, die sich gegenseitig decken, die in der Zeichnung mit gleicher Farbe (u. gleicher Strichzahl) markierten Linien werden zusammenfallen.

Das was hier in der Ebene, im 2 dimensionalen Raum, liegt, fällt in gewisser Weise zusammen, wenn ich in den 3 dimensionalen Raum übergehe. Das Quadrat besteht aus 4 Seiten, der Würfel aus 6 Quadraten u. ein Tessarakt würde aus 8 Würfeln bestehen, nur handelt es sich darum, dass diese 8 Würfel nicht wiederum zu einem Würfel zusammengesetzt werden dürfen, sondern dass immer einer in entsprechender Weise durch die 4. Dimension durchgehen müsste.

Will ich nun dasselbe mit dem Tessarakt machen, was ich eben mit dem Würfel getan habe, so muss ich dasselbe Gesetz einhalten. Wie ich nun hier 2 Systeme von Quadraten erhielt, so ergibt sich beim Tessarakt dasselbe mit Würfeln, wenn ich das vierdimensionale Tessarakt in den 3 dimensionalen Raum abfalte; u. dies Gebilde wird dann so aussehen wie dies durch die Zeichnung N. 10 veranschaulicht ist. Dabei sind jedesmal diese 4 Würfel im dreidimensionalen Raum so zu nehmen wie diese Quadrate (Zeichnung 9) im 2 dimensionalen Raum. Sie müssen sich nur genau anschauen, was ich hier gemacht habe. Bei dem Abklappen des Würfels in den ~~1~~ 2dimensionalen Raum ergab sich ein System von 6 Quadraten, bei der entsprechenden Prozedur am Tessarakt erhalten wir ein System von 8 Würfeln. Wir haben die Betrachtung für den 3dimensionalen Raum auf den 4dimensionalen übergeführt. Bei dem abgeklappten Würfel ergaben sich verschiedene korrespondierende Linien, die sich beim späteren Wiederzusammenklappen deckten. Ein gleiches findet statt mit den Flächen unserer einzelnen Würfel des Tessarakts. Es würde also beim Tessarakt die Fläche a des Würfels 5 (siehe Zeichnung 11) durch Beobachtung der 4. Dimension mit der nicht sichtbaren inneren Fläche des Würfels 6 zusammenfallen, in gleicher Weise die Fläche b des Würfels 1 mit dem hinteren Quadrat des Würfels 2 u. ebenso das Quadrat c des Würfels 4 mit dem entsprechenden des Würfels 3. Es bleibt übrig der von den 6 anderen eingeschlossene siebente Würfel. Ebenso wie ein von 4 Quadraten eingeschlossenes 5. Quadrat, wie wir dies an der entsprechenden Figur (Zeichnung 7) des vorigen Vortrages gesehen haben, dem nur 2dimensional schauenden Wesen unsichtbar bleibt, so ist dies mit dem 7. Würfel der Fall: er bleibt dem dreidimensionalen schauenden Auge verborgen. Diesem 7. Würfel entspricht beim Tessarakt ein achter Würfel, der, da wir hier einen vierdimensionalen Körper haben, als Gegenstück vom 7. Würfel in der 4. Dimension liegt.

Es ist auf eine andere Weise kaum möglich, eine Anleitung zu geben, wie man sich ein vierdimensionales Gebilde zu denken hat. Nun möchte ich noch auf eine andere Weise zu sprechen kommen, die Ihnen vielleicht auch noch die Möglichkeit geben wird, das besser einzusehen, um was es sich hier eigentlich handelt.

Figur 12 zeigt einen Oktaeder, der von 8 Dreiecken begrenzt ist.

Wenn Sie sich dies Gebilde vorstellen, so bitte ich Sie, mit mir in Gedanken folgende Prozedur vorzunehmen. Sie sehen, hier ist immer eine Fläche von einer andern geschnitten – hier z.B. in AB stossen 2 Seiten (Flächen) zusammen u. hier in EB stossen 2 zusammen. Der ganze Unterschied zwischen Oktaeder u. Würfel ist der Schnittpunkt der Winkel; wenn sich Flächen so schneiden wie beim Würfel, so entsteht ein Würfel, wenn sie sich aber so schneiden wie hier, so entsteht ein Oktaeder. Es handelt sich darum, dass wir Flächen unter den verschiedensten Winkeln sich schneiden lassen, dann bekommen wir die verschiedensten Raumgebilde. Denken Sie sich nun, wir könnten hier dieselben Flächen des Oktaeders auch in anderer Weise zum schneiden bringen. Denken Sie sich diese Fläche hier ~~z.B.~~ AEB nach allen Seiten fortgesetzt u. BCF auch, dann ebenso die rückwärts liegenden ADF u. EDC, so müssen sich die Flächen ebenfalls schneiden, u. zwar schneiden sie sich hier doppelt symmetrisch. Wenn Sie diese Flächen in dieser Weise verlängern, so fällt immer eine fort ABF, EBC, EAD u. DCF, u. die 4, die dann bleiben, die geben dieses Tetraeder, das man auch die Hälfte eines Oktaeders nennt, das deshalb die Hälfte eines Oktaeders ist, weil es die Hälfte der Flächen des Oktaeders zum Schnitt bringt. (Zeichnung 13 u. 14) Beim Oktaeder ist das ganz leicht vorzustellen.

Wenn Sie sich den Würfel in derselben Weise halbiert denken, wenn Sie also hier eine Fläche mit der entsprechenden anderen sich schneiden lassen, so bekommen Sie immer wieder einen Würfel, die Hälfte eines Würfels ist wieder ein Würfel. Daraus möchte ich einen wichtigen Schluss ziehen, will aber dazu noch dies zu Hilfe nehmen. ~~Nehmen~~ Hier habe ich einen Rhombendodekaeder, Sie sehen dass die Flächen unter gewissen Winkeln ~~an~~ aneinander grenzen. Es ist nun hier zu gleicher Zeit ein System

von 4 Drähten zu sehen, welche wir ich Achsendrähte nennen möchte, die zu einander gegenläufig sind. (Zeichnung 15)
Diese Drähte stellen uns in einer ähnlichen Weise ein System von Achsen dar, wie Sie es sich vorstellten dass am Würfel ein System von Achsen ist. Den Würfel bekommt man, wenn man bei einem System von 3 aufeinander senkrecht stehenden Achsen dadurch Schnittflächen hervorbringt, dass Stauungen eintreten. Lässt man die Achsen unter anderen Winkeln sich schneiden, so bekommt man ein anderes Raumgebilde. Das Rhombendodekaeder hat Achsen, die sich unter anderen als rechten Winkeln schneiden. Der Würfel gibt halbiert sich selbst, aber nur beim Würfel trifft dies zu. Das Rhombendodekaeder in seinen halben Flächen zum Schnitt gebracht, gibt ebenfalls ein anderes Raumgebilde. Nehmen wir nun das Verhältnis des Oktaeders zum Tetraeder, u. zwar will ich Ihnen sagen, was da gemeint ist. Das tritt klar hervor, wenn wir allmählich das Oktaeder in das Tetraeder übergehen lassen. Nehmen wir zu diesem Zwecke ein Tetraeder, dem wir, wie in Zeichnung N. 16 an der Spitze angedeutet, die Ecken abschneiden, u. setzen wir dies fort, bis die Schnittflächen sich an den Kanten des Tetraeders begegnen, dann bleibt übrig das angedeutete Oktaeder. So bekommen wir aus einem Raumgebilde, das durch 4 Flächen begrenzt ist, ein 8 seitiges Gebilde, wenn wir unter entsprechenden Winkeln die Ecken abschneiden.
Dasselbe, was ich hier mit dem Tetraeder gemacht habe, können Sie wiederum nicht mit dem Würfel machen. Der Würfel hat ganz besondere Eigenschaften, nämlich dass er das Gegenstück ist zum dreidimensionalen Raum. Wenn Sie zu den 3 Achsen senkrecht stehende Flächen haben, so bekommen Sie unter allen Umständen einen Würfel. Wenn man mit dem Würfel den theoretischen Würfel bezeichnen will, so sagt man, der Würfel ist überhaupt das Gegenstück

zum dreidimensionalen Raum. So wie das Tetraeder das Gegenstück ist zum Oktaeder, wenn ich die Seiten des Oktaeders zu bestimmten Schnitten bringe, so ist der einzelne Würfel das Gegenstück zum ganzen Raum. Wenn Sie sich den ganzen Raum als positiv denken, so ist der Würfel negativ. Der Würfel ist zum ganzen Raum polar – er hat im physischen Würfel sein ihm eigentlich korrespondierendes Gebilde.

Nehmen Sie einmal jetzt an, ich würde den Raum nicht 3 dimensional begrenzen, sondern ich würde ihn so begrenzen, dass ich 4 Kugeln ihn begrenzen lasse. Ich begrenze zunächst den 2 dimensionalen Raum dadurch, dass ich 4 ineinander gehende Kreise habe. Sie können sich nun vorstellen, dass die Kreise immer grösser u. grösser werden, dann werden sie mit der Zeit alle in eine gerade Linie übergehen. Sie bekommen dann 4 sich schneidende Geraden u. statt der 4 Kreise ein Quadrat. Denken Sie sich nun statt der Kreise Kugeln, u. zwar 6, sodass sie eine Art von Maulbeere bilden. Wenn Sie sich mit den Kugeln dasselbe denken wie mit den Kreisen, dass Sie immer grössere Durchmesser bekommen, so werden diese 6 Kugeln zuletzt ebenso die Begrenzungsflächen eines Würfels werden, wie die vier Kreise die Begrenzungslinien eines Quadrates wurden. Der Würfel ist jetzt dadurch entstanden, dass wir 6 Kugeln hatten, die flach geworden sind. Es ist also der Würfel nichts anderes als der Spezialfall für 6 ineinandergehende Kugeln, wie das Quadrat nichts anderes ist, als der Spezialfall für 4 ineinandergehende Kreise. Wenn Sie sich klar sind, dass Sie sich diese 6 Kugeln so vorzustellen haben, dass sie in die Ebene gebracht unseren früheren Quadraten entsprechen – wenn Sie sich ein absolut rundes Gebilde übergehend denken in ein gerades, so bekommen Sie die einfachste Raumform. Der Würfel kann vorgestellt werden als die Vereinfachung von 6 ineinandergeschobenen Kugeln. Sie dort können von einem Punkt eines Kreises sagen, dass er durch die 2. Dimension hindurchgehen muss. Haben Sie aber den Kreis so gross werden lassen, dass er eine gerade Linie bildet, so kann jeder Punkt zu dem andern kommen durch die 1. Dimension. Solange jedes von den 4 Gebilden ein Kreis ist, ist es 2 dimensional, jedes Grenzgebilde, wenn es eine Gerade geworden, ist 1 dimensional.

Jede Grenzfläche eines Würfels ist aus einem dreidimensionalen Gebilde entstanden (u. nur dadurch entstanden, dass die 3. Dimension auf 2 reduciert ist, eine Dimension als eingebüsst gedacht.). So ist die 2. Dimension entstanden durch Einbüssung der Tiefedimension. Wie wir ein 3 dimensionales Gebilde mit 2 dimensionalen Grenzen erhalten, wenn wir 3 dimensionale Grenzgebilde auf 2 dimensionale reducieren, so müssen Sie daraus schliessen, dass wir, wenn wir den 3 dimensionalen Raum betrachten, eine jede Richtung als verflacht zu denken haben – verflacht aus einem unendlichen Kreis, u. dass Sie, wenn Sie in der einen Richtung fortschreiten könnten, aus der anderen zurückkommen würden. So ist eine jede Raumdimension dadurch entstanden, dass sie die entsprechenden anderen verloren hat.

In unserem 3 dimensionalen Raum steckt ein 3 achsiges System, es sind 3 aufeinander senkrecht stehende Achsen, welche die anderen Dimensionen eingebüsst haben u. dadurch sind sie flach geworden. Sie bekommen also den 3 dimensionalen Raum, wenn Sie eine jede Richtung gerade biegen. Jeder Raumteil könnte in sich wiederum gekrümmt werden, dann würde entstehen durch Krümmen des eindimensionalen Gebildes ein 2 dimensionales, durch Krümmen des zweidimensionalen Gebildes bekommen Sie ein dreidimensionales; krümmen Sie

Sie jedoch das dreidimensionale Gebilde, so bekommen Sie das 4 dimensionalle, sodass das 4 dimensionale auch vorgestellt werden kann als ein gekrümmtes 3 dimensionales.

Und damit komme ich von dem Toten zum Lebendigen. Durch dieses Krümmen können Sie den Übergang vom Toten zum Lebendigen finden. Der 4 dimensionale Raum ist so specialisiert, dass er flach geworden ist.