1) Ueber die vierte Dimension. III

Wir haben das letzte Mal versucht, uns ein vierdimensionales Raumgebilde zu schaffen. Um es uns zu veranschaulichen, haben wir es auf ein 3 dimensionales reduziert. Zunächst haben wir ein 3 dimensionales Raumgebilde auf ein 2 dimensionales reduziert. Wir setzten statt der Dimension Farben ein, so dass ein Würfel längs der 3 Dimensionen in 3 Farben erschien. Dann konnten wir die Grenzen eines Würfels auf die Ebene hinlegen. Wir hatten durch Farben 3 Dimensionen repräsentiert, Wir legten 6 Quadrate in die Ebene hinein, dann stellten wir uns ein Durchgangsquadrat auf, durch welches wir die Quadrate gefärbt wurden. (So haben wir uns den Würfel vorgestellt.) Bei den Flächen hatten wir 2 Grenzfarben, und beim Würfel 3 und nehmen dann eine 4te Farbe als Grenzfarbe hinzu. Wir liessen auch dabei (nach der Analogie des Hintons) die Würfel durch die neue Farbe hindurchgehen, und auf der andern Seite erschienen sie dann wieder in ihrer eigenen Farbe. Nun will ich Jhnen eine andere Analogie geben um zunächst die 3 Dimensionen wieder auf 2 dann 4Dimensionen auf 3 zu reduzieren. Fig. I u II

Der Würfel kann an seinen Grenzflächen zusammengesetzt werden aus seinen 6 Grenzquadraten, statt aber nun, wie neulich, die Ausbreitung hintereinander vorzunehmen, wird sie jetzt auf eine andere Weise geschehen, ich werde auch diese Figur hinzeichnen. Sie sehen, wir haben jetzt auf diese Weise den Würfel ausgebreitet. 2 Systeme deren jedes in der Ebene liegt und aus je drei Vierecken besteht. Wenn ich nun den Würfel an diesen 6 Quadraten wieder zusammensetzen will, so muss ich die beiden Abteilungen so über einander legen, dass Quadrat III über I zu liegen kommt. Wenn auf diese Weise I unten zu liegen kommt, muss ich die Quadrate II und V hochklappen, IV und VI dagegen nach unten hinunter klappen.

2)
Dabei bekommen wir gewisse korespondierende Linien,die sich gegenseitig decken,die in der Figur mit gleichen Farben und gleichen Strichenzahl markierten Linien werden zusammen falleh. Das was hier in der Ebene im 2 dimensionalen Raum liegt,fällt in gewisser Weise zusammen,wenn ich in den 3 dimensionalen Raum übergehe. Das Quadrat besteht aus 4 Seiten,der Würfel aus 6 Quadraten und ein Tessarakt würde aus 8 Würfeln bestehen,nur handelt es sich darum,dass die 8 Würfel nicht wiederum zu einem Würfel zusammen gesetzt werden dürfen,dass immer einer in entsprechender Weisedurch die 4. Dimensiom durchgehen müsste und mit dem Tessarakt machen, was ich eben mit dem Würfel getan,so muss ich dasselbe Gesetz innehalten,Wie ich nun hier 2 Systeme von Quadraten erhielt,so ergibt sich beim Tessarakt dasselbe mit Würfeln,wenn ich das 4 Dimensionale Tessarakt in den 3 dimensionalen Raum abfalte,und dies Gebilde wird dann so aussehen: Fig III IV
Dabei sind jedesmal diese Würfel im 3 dimensionalen Raum so zu nehmen, wie diese Quadrate im 2 dimensionalen Raum. Sie müssen sich nur genau ~~aus~~ an-schauen,was ich hier gemacht habe. Bei dem Abklappen des Würfels in den 2 dimensionalen Raum ergab sich ein System von 6 Quadraten,bei der entsprechenden Prozedur am Tessarakt erhalten wir ein System von 8 Würfeln. Wir haben die Betrachtung für den 3 dimensionalen Raum auf den 4 dimensionalen übergeführt. Bei dem abgeklappten Würfel ergeben sich verschiedene korespondierende Linien,die sich beim spätern Wiederhochklappen dekten. Ein gleiches findet statt mit den Flächen unserer einzelnen Würfel des Tessaraktes. Es würde aber beim Tessarakte die Fläche a des Würfels 5 ,durch Beobachtung der 4 Dimension,mit der nicht sichtbaren untrn Fläche des Würfels 6 zusammenfallen,in gleicher Weise die Fläche 6 des Würfels 1 mit dem hintern Quadrat des Würfels 2 und ebenso dem Quadrat c des Würfels 4 mit dem entsprechenden des Würfels 3. Es bleibt übrig der von den 6 anderen eingeschlossenen 7. Würfel. Fig V

Ebenso mus ein von 4 Quadraten eingeschlossenes 5tes Quadrat: wie wir dies an der entsprechenden Figur des vorigen Vortrages gesehen haben,-dem nur 2 dimensional schauenden Wesen unsichbar bleibt, so ist dies hier mit dem 7ten Würfel der Fall, es bleibt dem 3 dimensionalen Auge verborgen. Diesem 7ten Würfel entspricht beim Tessarakt ein 8ter Würfel, der, da, wir hier einen 4 dimensionalen Körper haben, als Gegenstück zum 7ten in der 4ten Dimension liegt.

Es ist auf eine andere Weise kaum möglich, eine Anleitung zu geben, wie man sich ein 4 dimensionales Gebilde zu denken hat. Nun möchte ich noch auf eine andere Weise zu sprechen kommen, die Ihnen vielleicht auch noch die Möglichkeit geben wird, das besser einzusehen um was es sich handelt. Dieses hier ist ein Oktaeder das von 8 Dreiecken begrenzt ist. Wenn Sie sich dieses Gebilde hier vorstellen, so bitte ich Sie, mit in Gedanken folgende Prozedur vorzunehmen. Sie sehen, hier ist immer eine Fläche von einer andern geschnitten,-hier(z.B. in A B)stossen 2 Seiten (Flächen)zusammen, und hier (E B)stossen 2 zusammen. Der ganze Unterschied zwischen Oktaeder und Würfel ist d r Schnittpunktder Winkel! wenn sich Flächen so schneiden- wie beim Würfel - so entsteht ein Würfel! wenn sie sich so schneiden wie hier, so entsteht ein Oktaeder. Es handelt sich darum, dass wir Flächen unter den verschiedenen Winkeln sich schneiden lassen, dann bekommen wir die verschiedensten Raumgebilde.

Denken Sie sich nun, wir könnten hier dieselben Flächen des Oktaeders auch in anderer Weise zum Schneiden bringen. Denken Sie sich diese Fläche hier -z.B. A E B nach allen Seiten fortgesetzt, und die unter Fig 8 hier B C F auch, dann ebenso rückwärts liegenden A D F und E D C und rückwärts E A D und D C F und die 4 die dann bleiben, diegeben dieses ~~Tessarakt~~Tetraeder, das man auch die Hälfte eines Oktaeders nennt, das deshalb die Hälfte eines Oktaeders ist, weil es die Hälfte der Flächen des Oktaeders zum Schnitt bringt. Beim Oktaeder ist das ganz leicht vorzustellen. Wenn Sie sich den Würfel in derselben Weise halbiert denken, wenn Sie also hier eine Fläche mit der entsprechenden anderen sich schneiden lassen, so bekommen Sie immer wieder einen Würfel. Die Hälfte eines Würfels ist wieder ein Würfel. Daraus möchte ich einen wichtigen Schluss ziehen, will aber noch dies zur Hilfe nehmen. Hier habe ich einen Rhombendodekaeder Fig VII. Sie sehen, dass die Flächen unter gewissen Winkeln ~~zusammen~~ an einander grenzen. Es ist nun hier zu gleicher Zeit ein System von 4 Drähten zu sehen, welche ich Achsendrähte nennen möchte, und die zu einander gegenläufig sind. Diese Drähte stellen nun in einer ähnlichen Weise ein System von Achsen dar, wie Sie es sich vorstellten, dass ~~ein~~ am Würfel ein System von Achsen ist. Den Würfel bekommt man, wenn man bei einem System von 3 aufeinander senkrecht stehenden Achsen dadurch Schnittflächen hervorbringt, dass eintreten. Lässt man die Achsen unter anderen Winkeln sich schneiden, so bekommt man ein anderes Raumgebilde. Das Rhombendodekaeder hat Achsen, die sich unter einander als rechter Winkel schneiden. Der Würfel gibt halbiert sich selbst, - aber nur beim Würfel trifft dies zu. Das Rhombendodekaeder in seinen halben Flächen zum Schnitt gebracht, gibt ebenfalls ein anderes Raumgebilde.

Nehmen wir nun das Verhältnis des Oktaeders zum Tetraeder, und zwar will ich Ihnen sagen, was da gemeint ist. Das tritt klar hervor, wenn wir allmählich das Oktaeder in das Tetraeder übergehen lassen. Nehmen wir zu diesem Zweke ein Tetraeder, dem wir (wie an der Spitze angedeutet) die Ecken abschneiden, und setzen wir dies fort, bis die Schnittflächen sich an den Kanten des Tetraeders begegnen. Dann bleibt übrig das angedeutete Oktaeder. So bekommen wir aus einem Raumgebilde, das durch 4 Flächen begrenzt ist, ein 8seitiges Gebilde, wenn wir unter entsprechenden Winkeln die Ecken abschneiden. Dasselbe was ich hier mit dem Tetraeder gemacht habe, können Sie wiederum nicht mit den Würfeln machen.

Der Würfel hat ganz besondere Eigenschaften,nä~~h~~mlich,dass er das Gegenstück ist zum 3 dimensionalen Raum.Wenn Sie zu den 3 Achsen senkrecht stehende Flächen haben,so bekommen Sie unter allen Umständen einen Würfel.Wenn man mit dem Würfel den theoretischen Würfel bezeichnen will, so sagt man, der Würfel ist überhauptdas Gegenstück zu dem 3 dimensionalen Raum.So wie das Tetraeder das Gegenstück zum Oktaeder,wenn ich die Seiten des Oktaeders zu bestimmten Schnitten bringe,so ist der einzelne Würfel das Gegenstück zum ganzen Raum.Wenn Sie sich den ganzen Raum positiv denken,so ist der Würfel negativ.Der Würfel ist zum ganzen Raum polar,er hat ~~einen pl~~ im physischen Raum sein ihm eigentlich korrespondierendes Gebilde.

Nehmen Sie einmal jetzt an,ich würde den Raum nicht 3 dimensional begrenzen,sondern ich würde ihn so begrenzen,dass ich 4 Kugeln ihn begrenzen lasse.Ich begrenze zunächst den 2 dimensionalen Raum dadurch,dass ich 4 in einander gehende Kreise habe.Sie können sich nun vorstellen,dass diese Kreise immer grösser und grösser werden!dann ~~we~~ werden sie mit der Zeit alle in eine gerade Linie übergehen.Sie bekommen dann 4 sich schneidende Gerade und statt der 4 Kreise ein Quadrat. Denken Sie sich nun statt der Kreise Kugeln,und zwar 6, so dass sie eine Art von Maulbeere bilden.Wenn Sie sich mit den Kugeln dasselbe denken,wie mit den Kreisen,dass sie immer grössere Durchmesser bekommen, so werden ~~Sie~~ diese 6 Kugeln ebenso die Begrenzungsflächen eines Würfels werden,wie die 4 Kreise zu Begrenzungslinien eines Quadrats werden.

Der Würfel ist jetzt dadurch entstanden,dass wir 6 Kugeln ha~~tt~~tten,die flach geworden sind.Es ist aber der Würfel nichts anderes als der Spezialfall für 4 in einander gehende Kreise. ?
6 " " " Kugeln ?

Wenn Sie sich klar sind,dass Sie sich diese 6 Kugeln so vorzustellen haben,dass sie in die Ebene gebracht, ~~werden~~ unsern frühern Quadraten entsprechen - wenn Sie sich ein absolut rundes Gebilde übergehend denken in ein gerades, so bekommen Sie die einfachste Raumform. Der Würfel kann vorgestellt werden, als die Vereinfachung von 6 in einander geschobene Kugeln. Sie können von einem Punkte eines Kreises sagen, dass er durch die 2. Dimension hindurchgehen muss. Haben Sie aber den Kreis so gross werden lassen, dass er eine gerade Linie bildet, so kann jeder Punkt zu jedem andern kommen durch die erste Dimension. So lange jedes von den 4 Gebilden ein Kreis ist, ist er zweidimensional! jedes Grenzgebilde, wenn es eine Gerade geworden, ist eindimensional. Jede Grenzfläche eines Würfels ist aus einem 3 dimensionalem Gebilde entstanden, und nur dadurch entstanden, dass die 3te Dimension auf 2 reduziert ist! eine Dimension als eingebüsst gedacht. So ist die 2te Dimension entstanden, durch Einbüssung der Tiefe-Dimension. Wie wir ein 3 dimensionales Gebilde mit 2 dimensionalem Grenzen erhalten, wenn wir 3 dimensionale Grenzgebilde auf 2 dimensionale reduzieren, so müssen Sie daraus schliessen, dass wir, wenn wir den 3 dimensionalen Raum betrachten, eine jede Richtung als verflacht uns zu deken haben, - verflacht aus einem unendlichen Kreis, so dass Sie, wenn Sie in der einen Richtung fortschreiten könnten, aus der anderen zurück kommen würden. So ist eine jede Raumdimension dadurch entstanden, dass sie die entsprechenden andern verloren hat. In unserm 3 dimensionalen Raum steckt ein 3achsiges System! es sind 3 auf einander senkrecht stehende Achsen, welche die andern Dimensionen eingebüsst haben, und dadurch sind sie flach geworden. - Sie bekommen also den 3 dimensionalen Raum, wenn Sie eine jede Richtung gerade biegen. Jeder Raumteil könnte in sich wiederum gekrümmt werden. Krümmen Sie das eindimensionale Gebilde, so bekommen Sie ein 2 dimensionales! durch Krümmen des 2 dimensionalenbekommen Sie ein 3 dimensionales. Krümmen Sie endlich das 3 dimensionale Gebilde, so bekommen Sie das 4 dimensionale, so dass das 4 dimensionale auch vorgestellt werden kann als ein gekrümmtes dreidimensionales. - Und damit komme ich von dem ~~Tod~~ Toten zum Lebendigen.

7)

Durch dieses Krümmen können Sie den Uebergang vom Toden zum Lebendigen finden. Der 4 dimensionele Raum ist also spezialisiert, dass er flach geworden ist.