Vortrag von Dr. R. Steiner, Berlin, 31.V.1905

Nachschrift.

Ueber die vierte Dimension.

III.

Wir haben das letzte Mal versucht, uns ein vierdimensionales Raumgebilde zu schaffen. Um es uns zu veranschaulichen, haben wir es auf ein dreidimensionales ~~Raumgebilde~~ reduziert. Zunächst haben wir ein dreidimensionales Raumgebilde auf ein zweidimensionales reduziert. Wir setzten statt der Dimmensionen Farben ein, so dass ein Würfel längs der drei Dimensionen in drei Farben erschien. Dann konnten wir die Grenzen eines Würfels auf die Ebene hinlegen. Wir hatten durch Farben drei Dimensionen repräsentiert. Wir legten 6Quadrate in die Ebene hinein; dann stellten wir uns ein Durchgangsquadrat auf, durch welches die Quadrate gefärbt wurden. (So haben wir uns den Würfel vorgestellt.) Bei den Flächen hatten wir 2Grenzfarben, und beim Würfel drei und nahmen dann eine vierte Farbe als Grenzfarbe hinzu. Wir liessen auch dabei (nach der Analogie des Hinton) die Würfel durch die neue Farbe hindurchgehen, und auf der anderen Seite erschienen sie dann wieder in ihrer eigenen Farbe. Nun will ich Ihnen eine andere Analogie geben, um zunächst die drei Dimensionen wieder auf zwei und dann vier Dimmensionen auf drei zu reduzieren.

Der Würfel kann an seinen Grenzflächen zusammengesetzt werden aus seinen 6Grenzquadraten; statt aber nun, wie neulich, die Ausbreitung hintereinander vorzunehmen, wird sie jetzt auf eine andere Weise geschehen; ich werde auch diese Figur hinzeichnen.

Sie sehen, wir haben jetzt auf diese Weise den Würfel ausgebreitet -2Systeme, deren jedes in der Ebene liegt und aus je 3Vierecken besteht. Wenn ich nun den Würfel aus diesen 6Quadraten wieder zusammensetzen will, so muss ich die beiden Abteilungen so übereinanderlegen, dass Quadrat III über I zu liegen kommt. Wenn auf diese Weise I unten zu liegen kommt, muss ich die Quadrate II & V hochklappen, IV & VI dagegen nach unten hinunterklappen. Dabei bekommen wir gewisse korrespondierende Linien, die sich gegenseitig decken; die in der Figur mit gleicher

Farbe und gleicher Strichzahl markierten Lienien werden zusammenfallen. Das, was hier in der Ebene im zweidimensionalen Raum liegt, fällt in gewisser Weise se zusammen, wenn ich in den dreidimensionalen Raum übergehe.-Das Quadrat besteht aus 4Seiten, der Würfel aus 6Quadraten, und ein Tessarakt würde aus 8 Würfeln bestehen; nur handelt es sich darum, dass diese 8Würfel nicht wiederum zu einem Würfel zusammengesetzt werden dürfen, sondern, dass immer einer in entsprechender Weise durch die 4. Dimmension durchgehen müsste.

Will ich nun dasselbe mit dem Tessarakt machen, was ich eben mit dem Würfel getan, so muss ich dasselbe Gesetz innehalten. Wie ich nun hier 2Systeme von Quadraten erhielt, so ergibt sich beim Tessarakt dasselbe mit Würfeln, wenn ich das vierdimensionale Tessarakt in den dreidimensionalen Raum abfalte, und dies Gebilde wird dann so aussehen+

Dabei sind jedesmal diese 4Würfel im dreidimensionalen Raum so zu nehmen, wie diese Quadrate im zweidimensionalen Raum. Sie müssen sich nur genau anschauen, was ich hier gemacht habe. Bei dem Abklappen des Würfels in den zweidimensionalen Raum ergab sich ein System von 6Quadraten; bei der entsprechenden Prozedur am Tessarakt erhalten wir ein System von 8 Würfeln. Wir haben die Betrachtung für den dreidimensionalen Raum auf den vierdimensionalen übergeführt. Bei dem abgeklappten Würfel ergaben sich verschiedene korrespondierende Linien, die sich beim späteren Wiederhochklappen deckten. Ein gleiches findet statt mit den Flächen unserer einzelnen Würfel des Tessaraktes. Es würde also beim Tessarakte die Fläche des Würfels 5, durch Beobachtung der 4. Dimension, mit der nicht sichtbaren unteren Fläche des Würfels 6 zusammenfallen, in gleicher Weise die Fläche b des Würfels 1 mit dem hinteren Quadrat des Würfels 2, und ebenso das Quadrat c des Würfels 4 mit dem entsprechenden des Würfels 3. Es bleibt übrig der von den 6 anderen eingeschlossene siebente Würfel.-Ebenso wie ein von 4Quadraten eingeschlossenes 5tes Quadrat-wie wir dies an der entsprechenden Figur des vorigen Vortrags gesehen haben,- dem nur zweidimensional schauenden Wesen unsichtbar bleibt, so ist dies hier mit dem 7. Würfel der Fall: er bleibt dem dreidimensionalen Auge verborgen. Diesem 7. Würfel entspricht beim Tessarakt ein 8. Würfel der, da wir hier einen vierdimensionalen Körper haben, als Gegenstück zum 7. in der 4. Dimension liegt.

Es ist auf eine andere Weise kaum möglich,eine Anleitung zux geben,wie man sich ein vierdimensionales Gebilde zu denken hat.Nun möchte ich noch auf eine andere Weise zu sprechen kommen,die Ihnen vielleicht auch noch die Möglichkeit geben wird,das besser einzusehen,um was es sich hier eigentlich handelt.Dies hier ist ein Oktaeder,das von 8Dreiekken begrenzt ist.Wenn Sie sich dies Gebilde hier vorstellen,so bitte ich Sie,mit mir in Gedanken folgende Procedur vorzunehmen.Sie sehen,hier ist immer eine Fläche von einer anderen geschnitten - hier (z.B. in A.B.) stossen 2Seiten (Flächen) zusammen,und hier (EB) stossen zwei zusammen.Der ganze Unterschied zwischen Oktaeder und Würfel ist der Schnittpunkt der Winkel;wenn sich Flächen so schneiden -wie beim Würfel- so entsteht ein Würfel; wenn Sie sich aber so schneiden wie hier,so entsteht ein Oktaeder.Es handelt sich darum,dass wir Flächen unter den verschiedensten Winkeln sich schneiden lassen,dann bekommen wir die verschiedensten Raumgebilde.Denken Sie sich nun,wir könnten hier dieselben Flächen des Oktaeders auch in anderer Weise zum Schneiden bringen.Denken Sie sich diese Fläche hier -z.B.A.E.B. nach allen Seiten fortgesetzt,und diese unten hier B.C.F. auch,dann ebenso die rückwärts liegenden A.D.F. und E.D.C.;so müssen sich dann die Flächen ebenfalls schneiden und zwar schneiden sie sich hier doppelt symmetrisch.Wenn Sie diese Flächen in dieser Weise verlängern,so fällt immer eine fort-A.B.F.,E.B.C. und rückwärts E.A.D. und D.C.F.,und die vier die dann bleiben,die geben dieses Tetraeder,dass man auch die Hälfte eines Oktraeders nennt,das deshalb die Hälfte eines Oktaeders ist,weil es die Hälfte der Flächen des Oktaeders zum Schnitt bringt.Beim Oktaeder ist das ganz leicht vorzukstellen.

Wenn Sie sich den Würfel in derselben Weise halbiert denken,wenn Sie also hier eine Fläche mit der entsprechenden andern sich schneiden lassen,so bekommen Sie immer wieder einen Würfel;die Hälfte eines Würfels ist wieder ein Würfel.Daraus möchte ich einen wichtigen Schluss ziehen,will aber dazu noch dies zur Hilfe nehmen.-Hier habe ich einen Rhombendodekaeder.Sie sehen,dass die Flächen unter gewissen Winkeln an eine andere grenzen.Es ist nun hier zu gleicher Zeit ein System von vier Drähten zu sehen,welche ich Achsendrähte nennen möchte,und die zueinander gegenläufig sind.Diese Drähte stellen uns in einer ähnlichen Weise ein System von Achsen dar, wie Sie es sich vorstellten, dass am Würfel ein System von Achsen ist. Den Würfel bekommt man, wenn man bei einem System von drei aufeinandersenkrecht stehenden Achsen dadurch Schnittflächen hervorbringt dass Stauungen eintreten. Lässt man die Achsen unter anderen Winkeln sich schneiden, so bekommt man ein anderes Raumgebilde. Das Rhombendodekaeder hat Achsen die sich unter andern als rechten Winkeln schneiden. Der Würfel gibt halbiert sich selbst, aber nur beim Würfel trifft dies zu. Das Rhombendodekaeder in seinen halben Flächen zum Schnitt gebracht, gibt ebenfalls ein anderes Raumgebilde. Nehmen wir nun das Verhältnis des Oktaeders zum Tetraeder, und zwar will ich Ihnen sagen, was da gemeint ist. Das tritt klar hervor, wenn wir allmählich das Oktaeder in das Tetraeder übergehen lassen. Nehmen wir zu diesem Zwecke ein Tetraeder, dem wir (wie an der Spitze angedeutet) die Ecken abschneiden, und setzen wir dies fort, bis die Schnittflächen sich an den Kanten des Tetraeder begegnen -dann bleibt übrig das angedeutete Oktaeder. So bekommen wir aus einem Raumgebilde, das durch 4 Flächen begrenzt ist, ein 8seitiges Gebilde, wenn wir unter entsprechenden Winkeln die Ecken abschneiden. Dasselbe, was ich hier mit dem Tetraeder gemacht habe, können Sie wiederum nicht mit dem Würfel machen. Der Würfel hat ganz besondere Eigenschaften, nämlich, dass er das Gegenstück ist zum dreidimensionalen Raum. Wenn Sie zu den drei Achsen senkrecht stehende Flächen haben, so bekommen Sie unter allen Umständen einen Würfel. Wenn man mit dem Würfel den theoretischen Würfel bezeichnen will, so sagt man, der Würfel ist überhaupt das Gegenstück zu dreidimensionalen Raum. So wie das Tetraeder das Gegenstück ist zum Oktaeder, wenn ich die Seiten des Oktaeders zu bestimmten Schnitten bringe, so ist der einzelne Würfel das Gegenstück zum ganzen Raum. Wenn Sie sich den ganzen Raum als positiv denken, so ist der Würfel negativ. Der Würfel ist zum ganzen Raum polar, -er hat im physischen Raum sein ihm eigentlich korrespondierendes Gebilde.

Nehmen Sie einmal jetzt an, ich würde den Raum nicht dreidimensional begrenzen, sondern ich würde ihn so begrenzen, dass ich vier Kugeln ihn begrenzen lasse. Ich begrenze zunächst den zweidimensionalen Raum dadurch, dass ich vier ineinandergehende Kreise habe. Sie können sich nun vorstellen, dass diese Kreise immer grösser und grösser werden; dann werden sie mit der Zeit alle in eine gerade Linie übergehen. Sie bekommen dann vier sich schneidende Geraade und statt der vier Kreise ein Quadrat. Denken Sie sich nun statt der Kreise Kugeln und zwar 6-so dass sie eine Art von Maulbeere bilden. Wenn Sie sich mit den Kugeln dasselbe denken, wie mit den Kreisen, dass sie immer grössere Durchmesser bekommen, so werden diese 6Kugeln zuletzt ebenso die Begrenzungsflächen eines Würfels werden, wie die 4Kreise zu Begrenzungslinien eines Quadrates wurden.

Der Würfel ist jetzt dadurch entstanden, dass wir 6Kugeln hatten, die flach geworden sind. Es ist also der Würfel nichts anderes, als der Specialfall für 6ineinandergehende Kugeln, wie das Quadrat nichts anderes ist, als der Specialfall für vier ineinander gehende Kreise.

Wenn Sie sich klar sind, dass Sie sich diese 6 Kugeln so vorzustellen haben, dass Sie in die Ebene gebracht unseren früheren Quadraten entsprechen, wenn Sie sich ein absolut rundes Gebilde übergehend denkn in ein grades, so bekommen Sie die einfachste Raumform. Der Würfel kann vorgestellt werden als die Vereinfachung von 6 ineinandergeschobenen Kugeln. Sie können von einem Punkt eines Kreises sagen, dass er durch die 2. Diemnsion hindurchgehen muss. Haben Sie aber den Kreis so gross werden lassen, dass er eine gerade Linie bildet, so kann jeder Punkt zu jedem anderen kommen durch die 1. Dimension. Solange jedes von den 4Gebilden ein Kreis ist, ist es zweidimensional; jedes Grenzgebilde, wenn es eine Gerade geworden, ist eindimensional. Jede Grenzfläche eines Würfels ist aus einem dreidimensionalen Gebilde entstanden, und nur dadurch entstanden, dass die dritte Dimension auf 2 reduziert ist; eine Diemsnion, also eingebüsst gedacht. So ist die zweite Dimension entstanden durch Einbüssung der Tiefe-Dimension. Wie wir ein dreidimensionales Gebilde mit zweidimensionalen Grenzen erhalten, wenn wir dreidimensionale Grenzgebilde auf zweidimensionale reduzieren, so müssen wir daraus schliessen, dass wir, wenn wir den dreidimensionalen Raum betrachten, eine jede Richtung als verflacht uns zu denken haben, -verflacht aus einem unendlichen Kreis; sodass Sie, wenn Sie in der einen Richtung fortschreiten könnten, aus der anderen zurückkommen würden. So ist eine jede Raumdimension dadurch entstanden, dass sie die entsprechenden andern verloren hat. In unsern dreidimensionalen Raum steckt ein dreiachsiges System; es sind 3aufeinander senkrecht stehende Achsen, welche die andern Dimmensionen eingebüsst haben, und dadurch sind sie flach geworden - Sie bekommen also den dreidimensionalen Raum, wenn Sie eine jede Richtung gerade biegen. Jeder Raumteil könnte in sich wiederum gekrümmt werden; dann würde entstehen: Krümmen Sie das eindimensionale Gebilde, so bekommen Sie ein zweidimensionales; durch Krümmen des zweidimensionalen bekommen Sie ein dreidimensionales; krümmen Sie endlich das dreidimensionale Gebilde, so bekommen Sie das vierdimensionale, sodass das vierdimensionale auch vorgestellt werden kann als ein gekrümmtes dreidimensionales -und damit komme ich von dem Toten zum Lebendigen. Durch dieses Krümmen können Sie den Uebergang vom Toten zum Lebendigen finden. Der vierdimensionale Raum ist so specialisiert, dass er flach geworden ist.