

Stuttgart
Den 11. März 1920 (b)

III.
====

VMB

Fragen von Dr. Ernst Blümel nach seinem Vortrag
"Ueber das Imaginäre und den Begriff des Unendlichen
und Unmöglichen". -

1. Frage: Kann der hier vorgebrachte Versuch, das Ueberima-
ginäre durch Punktbeziehungen auf krummen Flächen, resp. Man-
nigfaltigkeiten zu definieren, als ein wirklichkeitsgemässer
bezeichnet werden?

2. Frage: Ist es möglich, zu lebendiger Anschauung des Imagi-
nären zu kommen; beziehungsweise liegen wirkliche Entitäten
dem Imaginären zu Grunde?

3. Frage: Nach welchen Richtungen verlangt die moderne Mathe-
matik, insbesondere in formaler Hinsicht, einen Ausbau im Sinne
der Geisteswissenschaft?

A n t w o r t v o n D r . R u d o l f S t e i n e r .

Ja, da möchte ich zunächst von der zweiten Frage
ausgehen. Die Antwort darauf ist nicht so ganz leicht zu geben.
Aus dem Grunde nicht, weil man gerade dann, wenn man diese

Antwort zu formulieren versucht, sehr stark aus dem Gebiet des Anschaulichen hinauskommen muss. Man hat schon gesehen, als ich in diesen Tagen auf eine Frage von Herrn Dr. Müller geantwortet habe, dass ich nötig hatte, um überhaupt für einen mathematischen Fall ein anschauliches Correlat zu geben, zu zeigen wie dieses Anschauungscorrelat liegt beim Uebergang von einem Röhrenknochen zu einem Kopfknochen, dennoch ist es ein ganz anschauliches noch. Man kann wenigstens da die Objekte in Anschauung vor sich haben, wenn auch in einem Uebergang des einen Objekts in das andere.

Wenn man das Imaginäre als geistige Realität anschauen will, so ergibt sich einem das Folgende. : Man hat nötig, wie ich ja gerade bei diesen physikalischen Betrachtungen gezeigt habe, überzugehen von dem Positiven zum Negativen, wenn man überhaupt über gewisse Beziehungen der sog. ponderablen Materie zu dem sog. Inponderablen wirklichkeitsgemäße Vorstellungen gewinnen will. Nun liegen aber selbst bei Versinnlichungen schon sehr gewöhnlicher Gebiete Notwendigkeiten vor, die zeigen, wie man über die gewöhnlichen, landläufigen symbolischen Zeichnereien hinauskommen muss. Ich will nur das Folgende erwähnen. Man kann ja z. B. , wenn man das gewöhnliche Spektrum, wenn es gradlinig geworden ist, zeichnet, eine gerade Linie zeichnen von dem Rot durch das Grün zu dem Violet, man wird aber nicht alles, was in Betracht kommt, in der Symbolisierung drinnen haben, wenn man es so zeichnet, sondern man wird erst dann alles drinnen haben, wenn man, um das Rot zu Symbolisieren, eine Kurve zeichnet, etwa so in dieser Ebene verlaufend,

Und um das Violet zu erreichen, nun in die Tafel hineingeht und hinübergeht. Sodass von oben angesehen sich das Rot gewissermassen ergeben würde vor dem Violet liegend. Ich müsste hinausrücken und mit dem Violet zurückrücken. Dadurch würde ich eine Charakteristik bekommen dafür, dass das Violet in das Chemische hineingeht, das Rot nach der Wärme hinausgeht. Ich bin also genötigt, die gerade Linie hier schon zu erweitern, sodass die gewöhnliche Zeichnung, die ich mache schon eine Projektion desjenigen ist, was ich eigentlich zeichnen sollte.

Man ist nun tatsächlich, wenn man klar werden will über gewisse Dinge, die sich einfach in der höheren Wirklichkeit - wenn ich so sagen soll - ergeben, genötigt, nun nicht nur zu gehen aus dem Positiv - Materiellen zum Negativen - Materiellen, sondern man ist ebenso wenig befriedigt, wenn man das tut, wie man befriedigt sein kann, wenn man hier in der geraden Linie vom Rot durch das Grün ins Violet fortschreitet. Denken Sie sich nun darüber den Kreis gezeichnet, so haben Sie, indem Sie genötigt sind, von demselben Punkte, der jetzt hier liegt, herzugehen, und dann hierher, nicht mehr nach dem Punkte zurück zu kommen, sondern Sie sind genötigt, spiralig hier fortzuschreiten. Ebenso sind Sie genötigt, wenn Sie aus dem Räumlichen in das Nichträumliche durch Symbolisierung des Positiven ⁱⁿ zum Negativen hinübergehen, vorwärts zu schreiten noch von dem, was die höhere Gattung vom Räumlichen und Nichträumlichen wäre.

Also nehmen wir an, gerade wie es sonst von zwei verschiedenen Arten eine Zusammenfassung geben könnte, die beide enthält, so könnten wir uns vorstellen, dass es etwas gibt, was räumlich und nichträumlich ist. Dazu muss ein Drittes ge-

sucht werden. Und wenn man nun wirklich eingeht im Gebiet der höheren Wirklichkeit auf das Physisch - Wirkliche, und man bezeichnet das Physisch - Wirkliche mit dem positiven Vorzeichen, so ist man genötigt, einfach das Aetherische, das wirkliche Aetherische, wobei man aus dem Räumlichen hinauskommt, also in das Geistige schon hereinkommt, mit dem negativen Vorzeichen zu versehen. Will man aber ins Astrale gehen, so kommt man nicht zu recht mit dem Räumlichen und Unräumlichen, sondern man muss eben zum Dritten gehen, das sich zu dem Positiven und Negativen genau so verhält, wie in der formalen Mathematik das Imaginäre zu dem Positiven und Negativen. Und man würde sogar genötigt sein, wenn man von dem Astralen zur wahren Entität des Ich übergeht, genötigt sein, einen Begriff aufzuschreiben, der überimaginär wäre im Verhältnis zum Begriff des Imaginären. Deshalb war mir immer so unsympathisch die Antipathie gegenüber dem Überimaginären weil beim Aufsteigen zum Ich man den Begriff wirklich nötig hat, es ist nicht möglich, ihn auszulassen, es handelt sich nur darum, ob man ihn in der rechten Weise anwendet, - wenn man im rein formalen der Mathematik bleibt, wenn man so vorgeht richtig mit den mathematischen Formationen, dass man nicht aus dem Wirklichen heraus kommt. Ich habe heute mit jemand der mir begegnete ein solches Problem besprochen, welches auch auf dem arithmetischen Gebiet sehr deutlich zeigt, dass man etwas haben kann in mathematischer Behandlung, was ausserordentlich schwer seine Beziehung zu der Realität herstellen kann, das ist das Wahrscheinlichkeitsproblem. Ich kann im Versicherungswesen ausrechnen, wann einer stirbt, soweit es gilt für die Menge. Ich kann mich danach ge-

nau richten bei der Menge. Ich kann aber unmöglich daraus den Schluss ziehen, dass der betreffende Mensch genau in dem Jahr zu sterben hat, das ausgerechnet werden muss. Es fehlt mir also die Realität aus meinen Berechnungen. So ist es auch sehr häufig, dass gewisse Rechnungsergebnisse in formaler Beziehung richtig sind, aber mit dem, was wirklich ist, nicht stimmen. Und so könnte es auch sein, dass man das Formale der Mathematik manchmal zu rektifizieren hätte nach solchen Ergebnissen der überempirischen Wirklichkeit. Es ist z. B. erst zu prüfen, ob es richtig ist, wenn ich $a \cdot b = 0$ habe, dass zu diesem Ergebnis nur gekommen werden kann, wenn einer der Faktoren 0 ist. Wenn das so ist, so ist es gewiss wahr, dass man zu dem Resultat 0 kommt. Aber es muss die Frage aufgeworfen werden: Könnte es nicht sein, dass auch einmal das Resultat 0 auftritt, wenn keiner der beiden Faktoren 0 wäre? - Das könnte der Fall sein, wenn man durch die Realität genötigt wird, zu überimaginären Zahlen, die dann entsprechende Correlate sind einer überempirischen Wirklichkeit, zu kommen.

Also tatsächlich, man muss versuchen, das Reale in seiner Beziehung zum Imaginären, das überimaginäre in seiner Beziehung zum Imaginären und zum Realen, klar herauszuarbeiten in der Mathematik, aber es kann sein, dass man dann sogar genötigt ist, die Rechnungsgesetze zu modifizieren,

Was nun die erste Frage anbetrifft, da liegt das Folgende vor: Wir können ja nur unterscheiden dasjenige, was im Menschen gewissermassen über einem bestimmten Niveau liegt und unter einem bestimmten Niveau. Ich möchte sagen, ich erkläre es fast

jedem, von dem ich nur glaube, dass er einiges Verständnis dafür haben kann, jedem, der vor die bekannte Holzgruppe in Dor-nach kommt: "Christus in der Mitte als Menschheitsrepräsentant, Ahriman und Luzifer zu beiden Seiten" dass der Mensch, wie wir ihn vor uns haben, eigentlich nur vorzustellen ist dadurch, dass wir alles an ihm als einen Gleichgewichtszustand vorstellen. Auf der einen Seite ist das Uebersinnliche, auf der anderen Seite das Untersinnliche. Das Menschenwesen stellt eigentlich immer nur den Gleichgewichtszustand zwischen dem Uebersinnlichen und Untersinnlichen dar. Nun hängt ja natürlich der Mensch zusammen als eine Art Mikrokosmos mit dem Makrokosmos. Daraus können Sie aber ersehen, dass ausdrückbar sein muss die Beziehung des Menschenwesens, also jede Einzelheit im Menschenwesen, zu einem Entsprechenden im Makrokosmos. Ich kann die Frage aufwerfen: Wenn ich das Untersinnliche (Zeichnung : wenn das die Gleichgewichtsfläche wäre) im Menschen habe, und es mir zunächst vorstelle als zusammenlaufende Kurve, und das Uebersinnliche hier ist dasjenige, was der Mensch in seinem Bewusstsein hat, als auseinanderlaufende Kurve, so bekomme ich soetwas, möchte ich sagen, was sich unten zum Knoten zusammenbildet, und oben auseinander geht. Das wäre zu gleicher Zeit nämlich dargestellt das Drinnenstehen des Menschen im Makrokosmos, Denn durch diese untere, mehr knollenartige Fläche entzieht sich der Mensch dem Makrokosmos. Durch diese Fläche, die ihre Kurve hat, die fortwährend auseinandergeht, gliedert er sich ein in den Makrokosmos. Hier ungefähr würde der Punkt seiner freien Willensentschliessung liegen. Ueber dem Niveau der freien Willensent-

schliessung liegt alles dasjenige, wodurch der Mensch seine Kräfte hinausgehen lässt in den Makrokosmos. Unterhalb liegt dasjenige, wodurch er die Kräfte des Makrokosmos zusammenschliesst, sodass er überhaupt eine bestimmte Gestalt ist. Wenn man nun versuchen würde, aufzusuchen innerhalb des Gebietes dieser Flächenformen - es würde ja dadurch diese Kurve zustande kommen - gewisse Daten, von denen ich also eine Reihe von Daten mit x bezeichnen würde, die z. B. darstellen, was an Weltgedanken überschaut werden kann, das hier, was an Weltenkräften überschaut werden kann, und hier was an Weltbewegungen geschaut werden kann, so würde ich daraus bilden müssen eine Funktion, wenn ich bekommen wollte dasjenige, was nun hier unten im Menschen immer dem entspricht. Ich würde eine Funktion bilden müssen von den Daten da oben, und würde heraus bekommen dasjenige, was da unten im Menschen dem entspricht. Ich will sagen, da brauchen wir eine Funktion von $x y z$. Aber in dem Augenblick, wo ich Zahlen finden will für diese Zusammengehörigkeit, ist es unmöglich, sie im Gebiete jener Zahlensysteme zu finden, die ich auf der Ebene noch haben kann. Ich muss in diesem Falle, wenn ich den übersinnlichen und den untersinnlichen Menschen miteinander in Verbindung bringe, zu Gleichungen übergehen, die Zahlen in sich enthalten von solchen Systemen, die auf Flächen liegen, und zwar sind es Flächen, die sogar ziemlich genau zu definieren sind, Flächen, die auf Rotations - Paraboloiden liegen müssen. Also solche Flächen, welche entstehen, wenn Kegel so rotieren, dass jeder Punkt, der rotiert, zu gleicher Zeit fortwährend seine Geschwindigkeit ändert.

Es sind Rotations - Paraboloiden, die dadurch noch kompliziert sind, dass die Punkte nicht ihre starre Beziehung zueinander behalten, sondern unter gewissen Gesetzen die Punkte sich ändern. Es sind also die Flächen, die ich da brauche in sich lebendige Rotations - Paraboloiden. Es ist ein ungeheuer schwieriger Zusammenhang da, den bis jetzt einzelne Menschen schon vorgestellt haben, den man als eine Notwendigkeit herausfindet, mit dem sich aber erst rechnen lassen wird formal, wenn gerade, wenn ich so sagen darf, die okkulte Wissenschaft, die Geisteswissenschaft, einmal mit der Mathematik zusammen arbeiten wird, wenn dieses Zusammenarbeiten einmal möglich sein wird. Und ich sehe eigentlich in diesem Weg, den Sie uns heute dargestellt haben, allerdings einen Anfang. Und ich glaube, dass Sie einmünden könnten in die Beantwortung der Forderung: man solle finden die Entsprechung für dasjenige, was die Zusammengehörigkeit zugeordneter Funktionen ergibt, die sich auf Zahlensysteme beziehen, die auf zwei in einem Punkte mit ihren Spitzen sich treffenden Rotations - Paraboloiden liegen, ein solches das nach unten zusammengeht, und ein solches das nach oben auseinanderläuft. Es wird ^{es} einfach diejenige Zahl ^{zu} zu finden sein, die auf solchen Rotations - Paraboloiden liegen, wie ich es beschreiben habe. Das entspricht auch durchaus einer Realität.

III $\frac{1}{2}$ Was nun die Ausbildung der formalen Mathematik betrifft, so muss ich gestehen, dass es mir scheint, dass da ja natürlich noch recht viel zu tun ist, und das man auch sehr viel tun kann. Aber mir kommt auch vor, dass vielleicht im Laufe des 19. Jahrhunderts, - vielleicht habe ich da aber auch

Unrecht - , vielleicht in derjenigen Zeit, in der ich weniger die Fortschritte der formalen Mathematik verfolgen konnte, das ist schon eine lange Zeit her, vielleicht ist es modifiziert, - ich hatte immer das Gefühl, dass diejenigen Arbeiten, die auf dem Gebiet der formalen Mathematik gemacht werden, sich furchtbar ^{Wenig} kümmern darum, ob nun die Rechnungsoperationen wirklich noch irgendwie möglich sind, ob sie nicht doch an irgend einem Punkte rektifiziert werden müssten durch irgend eine Beziehung zu einer möglichen Wirklichkeit. Also ob man rein formal weitergehen darf. Es ist z. B. möglich zu fragen, was geschieht, wenn man multipliziert meinetwegen eine eindimensionale Mannigfaltigkeit, mit einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Solche Dinge kann man beantworten, aber man muss doch immer fragen: entspricht einer solchen ν Operation nicht nur irgend eine Wirklichkeit, sondern auch nur etwas, was man sich vorstellen kann? Und ich glaube, dass wenigstens, um auf diesem Wege auf einen grünen Zweig zu kommen, es vielleicht doch notwendig sein wird bestimmte Definitionen zu geben über den Begriff des Nur - Rechnungsmässigen. Ich habe mich vor längerer Zeit einmal damit beschäftigt, ob es z.B. möglich ist, den pythagoräischen Lehrsatz, auch ohne dass man auf das Anschauliche übergeht, also rein zahlenmässig ausgedrückt, zu verifizieren, arithmetisch zu beweisen. Es wird sich wirklich darum handeln, ob man das rein Arithmetische so streng erfassen kann, dass man nicht unwillkürlich in das Geometrische hinüberkommt. Nicht wahr, wenn man rechnet mit Zahlen, - so lange man unter den gewohnten Zahlen bleibt, sind es halt eben Zahlen, und man

hat nicht nötig, vom Zahlensystem auf einem bestimmten Raumgebiet zu sprechen. Geht man aber über zu diesen anderen Zahlen, zu imaginären Zahlen, Komplexzahlen, zu Ueberkomplexzahlen, zu Ueberimaginären + Zahlen, dann muss man vom höheren Raumgebiet sprechen. Sie haben ja gesehen, wie man das kann, aber eigentlich nur dadurch, dass man aus unserem gewöhnlichen Raum herauskommt. Und deshalb scheint es mir schon notwendig zu sein, dass vielleicht die rein formale Mathematik, bevor sie Zahlen aufstellt, die sich nur symbolisieren lassen, - es ist ja zunächst eine Art Symbolisieren, dadurch dass man weitere entsprechende Punkte aufträgt auf gewisse Raumgebiete, dass man die Untersuchung vollzieht, wie solche höheren Zahlen auch vorstellbar sind ohne Zuhilfenahme der Geometrie. Also auch in dem Sinne, dass ich z. B. eine Zahlenlinie schon darstelle, positive und negative Zahlen. Es müsste auch beantwortet werden: wie ist rein elementarisch das Positive zum Negativen vorzustellen. Mir scheint, ich kann aber nichts Abschliessendes geben, ich weiss nichts darüber, habe mich nicht damit beschäftigt, ebenso wenig die Gauss'sche Lösung, die einfach vorstellungsgemäss Unterschiede annimmt zwischen Positiv und Negativ, ebenso gut wie das Negative bei Düring für ihn nichts anderes ist als die Subtraktion, für die nur der Minuand fehlt. Ebenso ist es für die imaginäre Zahl, Wurzel aus Minus 1, nichts anderes, als der Versuch, eine Rechnungsoperation auszuführen, die man nur andeuten kann, nicht in Wirklichkeit ausführen kann, Sowie, wenn ich minus 3 habe, und nichts habe wo von ich abziehen kann, bleibt mir minus 3. Es ist bloss eine angedeutete Rechnungsoperation,

Aber es ist auch der Differenzial - Quotient nur eine angedeutete Rechnungsoperation, was nichts anderem entspricht. Das scheint mir auch eine Einseitigkeit zu sein bei Düring, und die Lösung wird wahrscheinlich in der Mitte liegen. Aber die Lösung dieser Probleme müsste erst erfolgen, ehe man in der formalen Mathematik auf einen grünen Zweig kommen wird.

=====